ANALES DE LA UNIVERSIDAD

AÑO I | MONTEVIDEO, JULIO DE 1892 | TOMO II

Apuntes sobre la teoría de las Determinantes

REDACTADOS

Para los aspirantes al ingreso en la Facultad de Matemáticas

POR JUAN MONTEVERDE

---

1. **Permutaciones.** — Se llaman permutaciones de n objetos ó *elementos*, los diferentes grupos que se pueden formar con esos n objetos ó elementos agrupándolos de todas las maneras posibles, de modo que todos los elementos entren en cada grupo y que cada uno sólo entre una vez. — Así, con los elementos a y b se pueden formar las permutaciones ab, ba; con los elementos $a\ b\ c$ se pueden formar las permutaciones $a\,b\,c$, $a\,c\,b$, $b\,a\,c$, $b\,c\,a$, $c\,a\,b$, $c\,b\,a$; con las cifras 3, 4, 5 pueden formarse las permutaciones 3 4 5, 3 5 4, 4 3 5, 4 5 3, 5 3 4, 5 4 3.

Las permutaciones de 2 elementos se llaman *binarias*, las de 3 elementos se llaman *ternarias*, las de 4 elementos se llaman *cuaternarias*, las de 5 se llaman *quinarias*, y así sucesivamente.— Designaremos el número de permutaciones binarias, ternarias,.... que es posible obtener con 2, 3 ... n elementos, respectivamente por P_2, P_3 .... P_n.

2. *Fórmula de las permutaciones.* — Como con 2 elementos $a\,b$ sólo se pueden formar las permutaciones $a\,b$ y $b\,a$, es decir, 2 permutaciones, podemos establecer...... $P_2 = 2 = 1 \times 2$.

3. Para obtener todas las permutaciones posibles con 3 elemen-

tos *a*, *b*, *c*, basta introducir el 3.er elemento *c* en cada una de las binarias *a b*, *b a*, haciendo que este 3.er elemento ocupe todos los lugares posibles: cada permutación binaria dará entonces 3 ternarias, luego las 2 binarias darán 2×3 ternarias, es decir, que $P_3 = 2 \times 3 = 1 \times 2 \times 3$.

Para obtener todas las permutaciones cuaternarias con los 4 elementos *a*, *b*, *c*, *d*, se forman primero las P_3 ternarias con *a*, *b*, *c*, y en cada permutación ternaria se coloca el 4.º elemento *d* en todas las posiciones posibles; como cada ternaria tiene 3 elementos, el elemento *d* podrá ocupar 4 posiciones, luego cada permutación ternaria dará origen á 4 cuaternarias, y las P_3 ternarias darán $P_3 \times 4$ cuaternarias, es decir que $P_4 = P_3 \times 4$, y poniendo el valor de P_3

$$P_4 = 1 \times 2 \times 3 \times 4$$

Siguiendo un razonamiento semejante se puede demostrar que con 5 elementos el número total de permutaciones diferentes es: $P_5 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$; y en general el número de permutaciones que es posible formar con *n* elementos, es dado por la fórmula $P_n = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$ [I]: ésta es la fórmula de las permutaciones, que traducida al lenguaje vulgar dice: *para tener el número total de permutaciones que es posible formar con* n *elementos, basta formar el producto de la serie natural de los números desde 1 hasta* n. — Así, por ejemplo, si se desea saber el número total de permutaciones que se pueden formar con 6 elementos, se emplea la fórmula [I] haciendo n=6....

$$P_6 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$$

Ejemplo: — *Si se colocan 10 personas en fila, ¿de cuántas maneras diferentes pueden colocarse?*

Es como si se preguntara *cuántas permutaciones pueden hacerse con ellas;* basta, pues, aplicar la fórmula [I], haciendo n=20: luego

$$P_{10} = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots\ldots\ldots \times 9 \times 10 = 1228800.$$

4. *Formación de las permutaciones.* — Conviene ejercitarse en la

formación de las permutaciones con elementos dados. — La manera más sencilla consiste en formar primero las permutaciones binarias con los dos primeros elementos; hacer que el 3.er elemento ocupe todas las posiciones posibles en cada permutación binaria; hacer que el 4.º elemento ocupe todas las posiciones posibles en cada una de las ternarias, y así sucesivamente hasta llegar al último elemento.—Tomemos como ejemplo la formación de todas las permutaciones que se pueden obtener con las 4 letras de la palabra *roma*. Formamos primero las permutaciones binarias de las 2 primeras letras *ro, or;* colocamos la 3.ª letra *m* de todas las maneras posibles en cada permutación binaria, y tendremos con

	ro........*rom*	*rmo*	*mro*
y con	*or*........*orm*	*omr*	*mor*

en todo 6 permutaciones, lo que también resulta de la fórmula [I] haciendo $n=3$.

Para formar ahora las permutaciones cuaternarias se coloca de todas las maneras posibles la 4.ª letra en cada permutación ternaria, y tendremos sucesivamente

con	*rom*.....*roma*	*roam*	*raom*	*arom*
"	*rmo*.....*rmoa*	*rmao*	*ramo*	*armo*
"	*mro*.....*mroa*	*mrao*	*maro*	*amro*
"	*orm*.....*orma*	*oram*	*oarm*	*aorm*
"	*omr*.....*omra*	*omar*	*oamr*	*aomr*
"	*mor*.....*mora*	*moar*	*maor*	*amor*

en conjunto 24 permutaciones, número que se obtiene también por la fórmula [I], haciendo $n=4$.

5. *Sucesiones é inversiones.* — Consideremos un grupo de elementos expresados por letras afectadas de índices numéricos, tal como $a_2\, b_3\, c_1$; se dice que dos índices forman sucesión si el menor precede al mayor, y que forman inversión si el mayor precede al menor. Según esto, en el grupo $a_2\, b_3\, c_1$, hay una sucesión y dos inversiones.

Un grupo de elementos se llama de *clase par si el número de inversiones de sus índices es par*, y se llama de *clase impar si el*

número de inversiones de sus índices es impar. Sean, por ejemplo, los grupos

$$a_4\, b_5\, c_1\, d_2\, e_3 \quad \text{y} \quad a_2\, b_5\, c_1\, d_4\, e_3$$

el 1.° tiene 6 inversiones y el 2.° tiene 5, ó lo que es lo mismo, el 1.° es de clase par y el segundo es de clase impar.

6. *Teorema de las inversiones.* — *Si en un grupo de elementos afectados de índices, se permutan dos índices, el grupo cambia de clase, es decir, que si era de clase par, pasa á ser de clase impar, y recíprocamente.*

1.° Si los índices son immediatos, como sería permutando 2 con 5 en el grupo $b_3\, a_2\, c_5\, d_1\, f_4$, que lo convertiría en $b_3\, a_5\, c_2\, d_1\, f_4$, se ve que el grupo cambia de paridad, pues sólo se gana ó se pierde la inversión de los dos índices permutados, según que éstos formasen antes una sucesión ó una inversión; las inversiones con respecto á los índices siguientes son las mismas para ambos índices antes y después de la permutación.

2.° Los índices que se permutan no son inmediatos. Sea el grupo....$c_4\, d_1\, b_3\, a_5\, f_6$ . . . en que se permutan los índices 4 y 6, vamos á demostrar que cambia la clase. — En efecto, podemos obtener de ....$c_4\, d_1\, b_3\, a_5\, f_6$ .... el grupo .... $c_6\, d_1\, b_3\, a_5\, f_4$ .... permutando sucesivamente el índice 4 con todos los intermedios y con el 6, y después el 6 con todos los que le siguen hasta llegar al lugar que ocupaba el 4, resulta que primero hay que hacer tantas permutaciones como sean los elementos intermedios más uno, y después tantas permutaciones como son los elementos intermedios; de modo que si n es el número de elementos intermedios, primero se hacen $n+1$ permutaciones y después n permutaciones, en conjunto $n+1+n=2\,n+1$ permutaciones, que es un número impar de permutaciones de elementos inmediatos; pero á cada permutación de éstos el grupo cambia la clase, luego cambiará para un número impar.

7. *Regla de Cramer.* — Como aplicación de las permutaciones y del teorema de las inversiones, vamos á dar la regla de Cramer para resolver los sistemas de ecuaciones de 1.er grado.

Sea el sistema

$$a_1\, x+b_1\, y=k_1$$
$$a_2\, x+b_2\, y=k_2$$

Fórmese el producto $a\,b$; *póngase á la 1.ª letra el índice* 1 *y á la 2.ª el* 2 *y se tendrá el grupo* $a_1\ b_2$; *permútense los índices en este grupo y se tendrá el* $a_2\ b_1$ (que representa una inversión) *al cual se dará el signo—poniéndolo á continuación del 1.º, y se habrá formado el binomio* $a_1\ b_2 - a_2\ b_1$, *que es el denominador común de los valores de x y de y. El numerador del valor de cada incógnita se obtendrá del denominador cambiando el coeficiente de la incógnita que se despeja por la cantidad conocida.*

Podemos, pues, escribir $x = \dfrac{\qquad}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$ $y = \dfrac{\qquad}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$;

el numerador del valor de x se obtiene cambiando en el denominador a (que es el coeficiente de x) por k (que es la cantidad conocida); será, pues, el numerador

$$k_1 b_2 - k_2 b_1 \quad \text{y} \quad x = \frac{k_1 b_2 - k_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

El numerador del valor de y se obtendrá cambiando en el denominador b (que es el coeficiente de y) por k (que es la cantidad conocida); el numerador del valor de y será entonces

$$a_1 k_2 - a_2 k_1 \quad \text{y} \quad y = \frac{a_1 k_2 - a_2 k_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

Consideremos ahora un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, y sea ese sistema,

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z &= k_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z &= k_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z &= k_3 \end{aligned}$$

Fórmese el producto $a\,b\,c$ *y asígnese á sus letras los índices 1, 2, 3, y se tendrá el grupo* $a_1 b_2 c_3$; *háganse con los índices todas las permutaciones posibles, dando á cada grupo el signo + ó el signo − según que sus índices presenten un número par de inversiones ó un número impar. El conjunto de los términos reunidos*

formará un polinomio que es el denominador común de los valores de las incógnitas; el numerador se obtiene cambiando en el denominador el coeficiente de la incógnita que se desea despejar, por la cantidad conocida. Para el sistema propuesto permutamos en $a_1 b_2 c_3$ los índices y tendremos los términos ó grupos $a_1 b_2 c_3$, $a_1 b_3 c_2$, $a_2 b_1 c_3$, $a_2 b_3 c_1$, $a_3 b_1 c_2$, $a_3 b_2 c_1$; el 1.º, 4.º y 5.º presentan un número par de inversiones: son positivos; el 2.º, 3.º y 6.º presentan un número impar de inversiones: son negativos; luego el denominador común es $a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1$; podemos, pues, escribir

$$x = \frac{\qquad}{a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1}$$

Para tener el numerador basta sustituir en el denominador a (que es el coeficiente de x) por k (que es la cantidad conocida). Así

$$x = \frac{k_1 b_2 c_3 - k_1 b_3 c_2 + k_2 b_3 c_1 - k_2 b_1 c_3 + k_3 b_1 c_2 - k_3 b_2 c_1}{a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 + a_3 b_2 c_1}$$

De igual manera se obtienen los valores de las incógnitas y y z.—Se aplica la regla de Cramer á un sistema de más ecuaciones con igual número de incógnitas—siguiendo un procedimiento semejante.

8. **Determinantes.** — *Siendo dado el producto de n cantidades $a_1, b_2, c_3, \ldots l_n$, si se permutan de todas las maneras posibles todos los índices, dejando fijas las letras, y se da á cada grupo así formado el signo + ó el signo − según que el número de inversiones de sus índices sea par ó impar, la suma algebraica de los grupos se llama la determinante de las n^2 cantidades*

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ldots & l_2 \\ \vdots \\ a_n & b_n & c_n & \ldots & l_n \end{matrix}$$

Cada una de esas n^2 cantidades se llama *elemento* de la determinante, y los diferentes grupos ó productos obtenidos se llaman *términos* de la determinante.

El producto $a_1 b_2 c_3 \dots l_n$ que tiene las letras y los índices en su orden natural, se llama *término principal* de la determinante.

9. Varias notaciones se emplean para designar la determinante de las n^2 cantidades expresadas: la más empleada es colocar los elementos en cuadro dispuestos por filas y columnas ordenadas por las letras y por los índices y comprendidos todos por dos rectas verticales que se llaman *barras.*

Para abreviar representaremos también una determinante por la letra $\triangle$.

10. El cuadro que comprende los elementos que constituyen la determinante se llama *matriz de la determinante.*

De modo que la determinante de las n^2 cantidades,

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \vdots & & & \\ l_1 & l_2 & \dots & l_n \end{matrix} \quad \text{se indica por} \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \vdots & & & \\ l_1 & l_2 & \dots & l_n \end{vmatrix}$$

11. De la definición de la determinante resulta que *cada uno de sus términos tiene un elemento de cada fila y un elemento de cada columna*, pues figuran en cada término todas las letras y todos los índices.

Observando la matriz de la determinante se ve que el *término principal es constituído por los elementos en diagonal de arriba abajo y de izquierda á derecha.*

12. Las determinantes se clasifican en *grados*, tomando la denominación del número de factores de sus términos: así una determinante cuyos términos tienen 2, 3, 4... factores ó elementos, se dice que es de 2.°, 3.°, 4.°... grado. *La matriz tiene siempre tantas filas y tantas columnas como indique su grado:* el número de elementos es, pues, siempre cuadrado del número que expresa el grado.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \text{ es de 2.º grado.}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ es de 3.}^{\text{er}} \text{ grado.}$$

13. *Teorema.— Si se disponen los elementos de una matriz de modo que las filas se hagan columnas y que las columnas se hagan filas, la determinamte no varía.*

En efecto, si se comparan las dos matrices

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \dots & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \dots & l_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \dots & l_3 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_n & b_n & c_n \dots & l_n \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 \dots & b_n \\ c_1 & c_2 & c_3 \dots & c_n \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ l_1 & l_2 & l_3 \dots & l_n \end{vmatrix}$$

que resultan de cambiar las filas en columnas, se observará que la diagonal correspondiente al término principal permanece la misma: luego resulta de la definición que las determinantes son idénticas.

NOTA. — Este teorema indica que *cuanto se demuestre para las columnas se aplica también á las filas, y recíprocamente.*

14. *Teorema. — Cuando en una matriz se permutan dos filas ó dos columnas, la determinante cambia de signo, ó lo que es lo mismo, queda multiplicada por — 1.*

En efecto, permutar dos filas equivale á permutar dos índices en cada término de la determinante; pero según el *Teorema de las Inversiones*, cuando se permutan dos índices en un término, éste cambia de clase y por consiguiente de signo, y como cambian todos, cambiará también la determinante.

Luego, podemos establecer:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \ldots & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \ldots\ldots & l_2 \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ a_h & b_h & c_h \ldots\ldots & l_h \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_k & b_k & c_k \ldots\ldots & l_k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & b_n & c^n \ldots\ldots & l_n \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \ldots\ldots & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \ldots\ldots & l_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_k & b_k & c_k \ldots\ldots & l_k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_h & b_h & c_h \ldots\ldots & l_h \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & b_n & c_n \ldots\ldots & l_n \end{vmatrix}$$

NOTA. — De este teorema resulta: 1.° *que si se hace un número par de permutaciones de filas ó de columnas, la determinante no cambia de signo, y cambia de signo haciendo un número impar de permutaciones.* 2.° *que si se permuta una columna ó una fila con su inmediata sucesivamente p veces, la determinante cambia ó no cambia de signo según que el número p de permutaciones sea impar ó par,* ó lo que es igual, *queda multiplicada por* $(-1)^p$.

15. *Teorema.* — *Cuando una matriz tiene dos filas iguales, ó dos columnas iguales, la determinante es nula.*

Sea

(A)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \ldots\ldots & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \ldots\ldots & l_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \ldots\ldots & l_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ a_2 & b_2 & c_2 \ldots\ldots & l_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ a_n & b_n & c_n \ldots\ldots & l_n \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ (2) \\ \\ \\ \\ \\ (h) \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

que tiene las filas (2) y (h) iguales: vamos á demostrar que la determinante es nula. Si permutamos las filas (2) y (h) según el teorema (14), la determinante cambia de signo: luego

$$(B) \qquad -\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \dots & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \dots & l_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \dots & l_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ a_2 & b_2 & c_2 \dots & l_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ a_n & b_n & c_n \dots & l_n \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ (h) \\ \\ \\ \\ \\ (2) \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

pero los segundos miembros de las igualdades (A) y (B) son idénticos; luego con los primeros miembros puede formarse la igualdad.

$$\Delta = -\Delta \quad ó \quad \Delta + \Delta = 0$$
$$ó \;\; 2\Delta = 0, \;\; \text{de donde} \quad \Delta = 0.$$

Queda, pues, demostrado que la determinante es nula.

16. *Teorema.* — *Cuando se multiplican por un mismo número todos los elementos de una columna, ó todos los de una fila, la determinante queda multiplicada por ese número.*

De la definición de la determinante (8) resulta que cada término tiene un elemento de cada fila y un elemento de cada columna: luego multiplicar por un mismo número todos los elementos de una fila ó de una columna implica introducir ese factor en cada uno de los términos de la determinante; por consiguiente, quedará multiplicada la determinante por ese factor.

Así, pues, dada la determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

si multiplicamos por m una columna cualquiera, la 2.ª, por por ejemplo, la determinante quedará multiplicada por m, cuyo factor se pone fuera de las barras. Entonces

$$\begin{vmatrix} a_1 & mb_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & mb_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & mb_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & mb_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

NOTA I. —Resulta de este teorema que *cuando en una matriz todos los elementos de una fila ó de una columna tienen un factor común, éste puede ponerse en evidencia fuera de barras.*

$$\text{Así} \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & 20 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a^2 & a^3 & a^4 \\ b^2 & b^3 & b^4 \\ c^2 & c^3 & c^4 \end{vmatrix} = a^2 \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ b^2 & b^3 & b^4 \\ c^2 & c^3 & c^4 \end{vmatrix} = a^2 b^2 \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ c^2 & c^3 & c^4 \end{vmatrix} = a^2 b^2 c^2 \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

NOTA II. —Como consecuencias de este teorema, resulta también:

1.º *No cambia el valor de una determinante suprimiendo ó introduciendo un factor común á todos los elementos de una fila, ó de una columna, con tal que ese factor se ponga en evidencia fuera de barras como multiplicador ó como divisor de la determinante.*

2.º *Se cambia el signo de la determinante al cambiar de signo á todos los elementos de una fila, ó de una columna, porque equivale á multiplicarlos por — 1.*

17. *Transformación de matrices.* — El teorema anterior y sus consecuencias nos permiten transformar una matriz, de modo que los elementos satisfagan á ciertas condiciones, entre las cuales mencionaremos, por la aplicación que tiene en el cálculo de las determinantes, la de reducir á 1 todos los elementos de una columna ó de una fila sin alterar el valor de la determinante.

1.ª TRANSFORMACIÓN

18. *Reducción de una determinante á otra equivalente que tenga iguales los elementos de una fila ó los de una columna.*

Sea, por ejemplo, la determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 5 & 7 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

que se desea transformar en otra equivalente que tenga iguales todos los elementos de la 2.ª columna. Basta para el efecto *multiplicar todos los elementos de cada fila por el producto de los demás elementos de la 2.ª columna.* De este modo todos los elementos de la 2.ª columna serán iguales al producto de los elementos de esa misma columna. Para que la determinante no se altere habrá que poner fuera de barras, como divisores, los factores por que sucesivamente se multiplicarán las filas. Considerando el ejemplo propuesto

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 5 & 7 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{5\times2\times1\times3\times2\times1\times3\times5\times1\times3\times5\times2}$$

$$\begin{vmatrix} 2\times5\times2\times1 & 3\times5\times2\times1 & 5\times5\times2\times1 & 4\times5\times2\times1 \\ 4\times3\times2\times1 & 5\times3\times2\times1 & 7\times3\times2\times1 & 6\times3\times2\times1 \\ 1\times3\times5\times1 & 2\times3\times5\times1 & 3\times3\times5\times1 & 5\times3\times5\times1 \\ 5\times3\times5\times2 & 1\times3\times5\times2 & 2\times3\times5\times2 & 3\times3\times5\times2 \end{vmatrix}$$

Cuando los elementos de la fila ó de la columna que se quiere igualar tienen factores comunes, se halla el mínimo común múltiplo de los elementos de esa fila ó columna, se multiplica cada columna ó fila por el cociente que resulta de dividir el m. c. m. por cada elemento de la columna ó fila, poniendo fuera de barras como divisores los factores por los cuales se multiplicó la determinante.

Antes de aplicar esta regla conviene poner en evidencia fuera de barras los factores comunes.

Sea, por ejemplo, la determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{vmatrix}$$

que se desea transformar en otra equivalente que tenga iguales los elementos de la 4.ª fila.

Observamos que

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{vmatrix} = 2\times4 \begin{vmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

y como el m. c. m. de los elementos de la 4.ª fila es 12, bastará: multiplicar la 1.ª columna por 12 : 1, la 2.ª por 12 : 2, la 3.ª por 12 : 3 y la 4.ª por 12 : 4, y obtendremos

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{12 \times 6 \times 4 \times 3} \begin{vmatrix} 12 & 30 & 36 & 39 \\ 12 & 18 & 20 & 21 \\ 36 & 42 & 44 & 45 \\ 12 & 12 & 12 & 12 \end{vmatrix}$$

Luego podemos escribir

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{vmatrix} = \frac{2 \times 4}{12 \times 6 \times 4 \times 3} \begin{vmatrix} 12 & 30 & 36 & 39 \\ 12 & 18 & 20 & 21 \\ 36 & 42 & 44 & 45 \\ 12 & 12 & 12 & 12 \end{vmatrix}$$

que tiene iguales los elementos de la 4.ª fila.

NOTA.— Obsérvese la analogía que hay entre los procedimientos indicados y los que se emplean para reducir quebrados á común denominador.

2.ª TRANSFORMACIÓN

19. *Reducción de una determinante á otra equivalente en que todos los elementos de una fila ó de una columna sean iguales á 1.*

Basta primero hacer iguales los elementos de la fila ó columna por la transformación anterior y sacar como factor fuera de barras el elemento común á la fila ó columna.

Ejemplo: Sea la determinante

$$\begin{vmatrix} 4 & 8 & 12 & 1 \\ 3 & 4 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

que se quiere transformar en otra equivalente que tenga todos los elementos de la 3.ª columna iguales á 1.

Igualamos primeramente todos los elementos de la 3.ª columna, por el m. c. m. que es 12, multiplicando sucesivamente las filas por 1, 3, 4 y 6, teniendo cuidado de sacar fuera de barras los divisores correspondientes, y resultará:

$$\begin{vmatrix} 4 & 8 & 12 & 1 \\ 3 & 4 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{1\times 3\times 4\times 6} \begin{vmatrix} 4 & 8 & 12 & 1 \\ 9 & 12 & 12 & 6 \\ 20 & 0 & 12 & 16 \\ 6 & 12 & 12 & 18 \end{vmatrix} = \frac{12}{\cdot 3\times 4\times 6} \begin{vmatrix} 4 & 8 & 1 & 1 \\ 9 & 12 & 1 & 6 \\ 20 & 0 & 1 & 16 \\ 6 & 12 & 1 & 18 \end{vmatrix}$$

El último miembro lo hemos obtenido poniendo fuera de barras el factor 12 común en la 3.ª columna.

20. *Simplificación de determinantes.*—Después de las transformaciones anteriores resultan factores comunes en algunas filas ó columnas; estos factores comunes conviene sacarlos fuera de barras para simplificarlos con los divisores.

Así, tomando el ejemplo anterior, llegamos á la igualdad.

$$\begin{vmatrix} 4 & 8 & 12 & 1 \\ 3 & 4 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \frac{12}{3\times 4\times 6} \begin{vmatrix} 4 & 8 & 1 & 1 \\ 9 & 12 & 1 & 6 \\ 20 & 0 & 1 & 16 \\ 6 & 12 & 1 & 18 \end{vmatrix} = \frac{12\times 4}{3\times 4\times 6} \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 & 6 \\ 20 & 0 & 1 & 16 \\ 6 & 3 & 1 & 18 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{2}{3} \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 & 6 \\ 20 & 0 & 1 & 16 \\ 6 & 3 & 1 & 18 \end{vmatrix}$$

21. *Determinantes menores.— Se llama determinante menor de una determinante dada, la formada por los elementos que quedan cuando se suprimen en ésta un número de filas é igual número de columnas.*

Orden de una determinante menor es el número de filas ó de columnas suprimidas en la principal para obtener la menor.—Según esto las determinantes menores que se obtienen suprimiendo una fila y una columna, son de 1.er orden; las que se obtienen suprimiendo dos filas y dos columnas son de 2.º orden, y así sucesivamente.

De la determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

podemos obtener nueve determinantes menores de 1.er orden; suprimiendo la 1.ª columna y la 1.ª fila resulta

$$\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

suprimiendo la 3.ª fila y la 2.ª columna resulta

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \&$$

22. *Notación de las determinantes menores de 1.er orden.* — Para indicar una determinante menor de 1.er orden emplearemos la letra $\triangle$ acompañada del elemento común á la fila y columna suprimida encerrado entre paréntesis. Así en la determinante

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

$$\triangle(c_3) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

que es la determinante menor de 1.er orden obtenida suprimiendo la 3.ª fila y la 3.ª columna, que son las que tienen común el elemento c_3. En la misma determinante $\triangle(b_4)$ representa la determinante menor de 1.er orden que se obtiene suprimiendo la fila y la columna que tienen común el elemento b_4; luego

$$\triangle[b_4] = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Una determinante da lugar á tantas determinantes menores de 1.er orden como elementos contiene su matriz.

23. *Complemento de un elemento.* — La determinante menor de 1.er orden que se obtiene suprimiendo la fila y la columna común á un elemento dado, se llama *determinante menor complementaria* de ese elemento; para abreviar la llamaremos *complemento* del elemento considerado.

Según esto, $\triangle[c_3]$ es el complemento del elemento c_3, $[\triangle a_4]$ es el complemento de a_4. No hay que olvidar que si

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta [c_3] = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

$$y \ \Delta [a_4 - \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

24. *Teorema. — Si en una determinante todos los elementos de una columna ó de una fila son nulos á excepción del 1.°, la determinante será igual á este elemento multiplicado por su complemento, precedido el producto del signo + ó —, según que la fila considerada ocupe lugar impar ó par.*

Supongamos que consideramos la 1.ª fila, y todos sus elementos son nulos á excepción del 1.°

Sea la determinante

$$\begin{vmatrix} a^1 & o & o & o \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

y vamos á demostrar que es igual á $a_1 \Delta [a_1]$, ó lo que es igual á

$$a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

En efecto. Cada término de la determinante debe contener un elemento de cada fila y uno de cada columna [8]; luego todos los términos de la determinante propuesta se anularán, á excepción de los que tengan a_1 ; de modo que a_1 será factor común de todos los términos de la determinante que no son nulos, y no pudiendo éstos contener ningún elemento de la 1.ª columna, a_1 multiplicará al conjunto de términos que se pueden formar con los elementos restantes

$$\begin{matrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{matrix}$$

permutados de todas las maneras posibles; es decir, que

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

2.° Consideremos ahora una fila cualquiera. Este caso puede reducirse al anterior, permutando sucesivamente esa fila con su inmediata superior hasta llevarla á ser la primera: cada permutación originará un cambio de signo, ó lo que es igual, una multiplicación por -1; luego, si para llevar la fila al primer lugar hay que hacer p permutaciones, habrá que multiplicar p veces por -1, ó sea por $(-1)^p$; luego cambiará el signo si el número p es impar, que equivale á decir si la fila ocupa lugar par, y no cambiará si la fila ocupa lugar impar. Así la determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -a_4 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

NOTA. — Aunque hemos hecho el razonamiento con respecto á filas, es evidente que el mismo razonamiento se aplica á las columnas.

25. El teorema (24) conviene enunciarlo de una manera más general diciendo: *Si en una determinante todos los elementos de una fila ó de una columna son nulos á excepción de uno, la determinante será igual á dicho elemento multiplicado por su complemento y precedido el producto del signo + ó del signo —, según que el elemento pertenezca á fila y columna de la misma paridad, ó de diferente paridad.*

Como ejercicio dejamos á cargo del estudiante la demostración de este enunciado general, consecuencia inmediata de la anterior.

26. *Descomposición de una determinante.*

Teorema. — Toda determinante es la suma algebraica de los pro-

ductos de los elementos de una misma fila ó columna por sus respectivos complementos, afectando cada producto con el signo + ó —, según que el elemento pertenezca á columna y fila de la misma ó distinta paridad.

Sea la determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \quad (M)$$

Supongámosla desarrollada, y ordenados sus términos con respecto á los elementos de la 1.ª fila y llamemos al polinomio resultante (M) $\Delta = A_1\ a_1 + B_1\ b_1 + C_1\ c_1 + D_1\ d_1$; haciendo $b_1 = c_1 = d_1 = o$; el 1.er miembro Δ se transforma en $a_1\ \Delta\ (a_1)$ y el 2.º en $A_1\ a_1$; luego $a_1\ \Delta\ (a_1) = a_1\ A_1$, luego $A_1 = \Delta\ (a_1)$; haciendo $a_1 = c_1 = d_1 = o$; el 1.er miembro de (M) se transforma en $-\ b_1\ \Delta\ (b_1)$ y el 2.º en $B_1\ b_1$, luego $-\ b_1\ \Delta\ (b_1) = B_1\ b_1$, luego $B_1 = -\ \Delta\ (b_1)$; haciendo $a_1 = b_1 = d_1 = o$, resulta $C_1 = \Delta\ (c_1)$; y haciendo $a_1 = b_1 = c_1 = o$, resulta $D_1 = -\ \Delta\ (d_1)$. Luego $\Delta = a_1\ \Delta\ (a_1) - b_1\ \Delta\ (b_1) + c_1\ \Delta\ (c_1) - d_1\ \Delta\ (d_1)$, ó lo que es igual

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1\ \Delta\ (a_1) - b_1\ \Delta\ (b_1) + c_1\ \Delta\ (c_1) - d_1\ \Delta\ (d_1)$$

Nota. — Aunque para más sencillez hemos hecho la demostración con respecto á la 1.ª fila, el teorema puede demostrarse para una fila cualquiera: basta, en efecto, llevar esa fila al primer lugar, cambiando ó no de signo á la determinante, según que la fila ocupe lugar par ó impar, y repetir después la demostración anterior.

Ejemplo. — Sea la determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & e_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix}$$

y vamos á demostrar que

$$\Delta = a_4 \Delta (a_4) - b_4 \Delta (b_4) + c_4 \Delta (c_4) - d_4 \Delta (d_4) + e_4 \Delta (e_4)$$

En efecto

$$-\Delta = \begin{vmatrix} a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & e_4 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ a_5 & b_5 & c_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix} = \Delta'$$

pero Δ' desarrollado por los elementos de la 1.ª fila nos da

$$\Delta' = a_4 \Delta [a_4] - b_4 \Delta [b_4] + c_4 \Delta [c_4] - d_4 \Delta [d_4] + e_4 \Delta [e_4]$$

luego

$$\Delta = -a_4 \Delta [a_4] + b_4 \Delta [b_4] - c_4 \Delta [c_4) + d_4 \Delta [d_4] - e_4 \Delta [e_4]$$

Vemos, pues, que el principio es general.

27. De lo expuesto resulta que toda determinante se puede descomponer en tantas determinantes de grado inmediato inferior como unidades tenga el grado de la 1.ª Claro es que por descomposiciones sucesivas puede llegarse á expresar una determinante cualquiera por un polinomio algebraico ordinario.

Cuando se descompone una determinante en la forma que acabamos de indicar, se dice que se desarrolla la determinante.

28. Conviene ejercitarse en los desarrollos de determinantes: al efecto consideremos la determinante

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$ que desarrollaremos por los elementos de la 2.ª fila.

Según el Teorema [25] podemos establecer

$$[M] \quad \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Desarrollaremos ahora cada una de estas determinantes:

La 1.ª por los elementos de la 2.ª fila $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -1 \times 2 + 4 \times 5 = -2 + 20 = 18$

La 2.ª por los elementos de la 1.ª columna $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \times 4 - 2 \times 2 = 12 - 4 = 8$

La 3.ª por los elementos de la 2.ª fila $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \times 5 + 1 \times 3 = -10 + 3 = -7$

y sustituyendo en

$$[M] \quad \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -1 \times 18 + 2 \times 8 - 3 \times -7 = -18 + 16 + 21 = 19$$

Nota. — Antes de proceder al desarrollo de una determinante conviene poner fuera de barras los factores comunes.

Vamos ahora á desarrollar la última determinante, reduciéndola antes á otra equivalente que tenga una fila ó una columna cuyos elementos sean todos iguales á 1; para esto conviene elegir la fila 3.ª, porque da lugar á empleo de factores más pequeños, pues siendo 4 el m. c. m. de sus elementos, basta multiplicar la 1.ª columna por 2, la 2.ª por 4, y la 3.ª por 1. Así

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{2 \times 4} \begin{vmatrix} 6 & 20 & 2 \\ 2 & 8 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \frac{2 \times 4}{2 \times 4} \begin{vmatrix} 3 & 10 & 1 \\ 2 & 8 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= | (30-8)-(9-2)+(24-20) | = (22-7+4) = 19$$

Ejemplo I. — Desarrollar

$$\triangle = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} \qquad (25)$$

Desarrollando cada una de las menores resultantes:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -2\ (3\times1-2\times2)+3\ (3\times3-2\times1)$$
$$= -2\ (3-4)\ +3\ (9-2)=2+21=23$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 3\ (4\times3-4\times2)-(4\times2-1\times4)=$$
$$3\ (12-8)-(8-4)=3\times4-4=8$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=2\ (4\times2-1\times4)-3\ (4\times0-12)=$$

$$2\ (8-4)-3\ (0-12)=2\times4-3\times-12=8+36=44$$

Luego

$$\Delta=-23+4\times8+2\times44=-23+32+88=97$$

Ejemplo II. — Desarrollar

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ c & d & a & b \\ d & a & b & c \end{vmatrix}$$

$$= a \begin{vmatrix} c & d & a \\ d & a & b \\ a & b & c \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} b & c & d \\ d & a & b \\ a & b & c \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} b & c & d \\ c & d & a \\ a & b & c \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} b & c & d \\ c & d & a \\ d & a & b \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} c & d & a \\ d & a & b \\ a & b & c \end{vmatrix} = -c \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} d & a \\ b & c \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} d & a \\ a & b \end{vmatrix}$$

$$=-c\ (a\ c-b^2)-d\ (c\ d-a\ b)+a\ (b\ d-a^2)$$

$$\begin{vmatrix} b & c & d \\ d & a & b \\ a & b & c \end{vmatrix} = b \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} c & d \\ b & c \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$$

$$= b\ (a\ c - b^2) - d\ (c^2\ b\ d) + a\ (b\ c - ad)$$

$$\begin{vmatrix} b & c & d \\ c & d & a \\ a & b & c \end{vmatrix} = b \begin{vmatrix} d & a \\ b & c \end{vmatrix} - c \begin{vmatrix} c & d \\ b & c \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} c & d \\ d & a \end{vmatrix}$$

$$= b\ (c\ d - a\ b) - c\ (c^2\ b\ d) + a\ (a\ c - d^2)$$

$$\begin{vmatrix} b & c & d \\ c & d & a \\ d & a & b \end{vmatrix} = b \begin{vmatrix} d & a \\ a & b \end{vmatrix} - c \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} + d \begin{vmatrix} c & d \\ d & a \end{vmatrix} =$$

$$= b\ (b\ d - a^2) - c\ (b\ c - a\ d) + d\ (a\ c - d^2)$$

Luego

$$\Delta = a\ c\ (a\ c - b^2) - a\ d\ (c\ d - a\ b) + a^2\ (b\ d - a^2)$$

$$- b^2\ (a\ c - b^2) + b\ d\ (c^2\ b\ d) - a\ b\ (b\ c - a\ d)$$

$$+ b\ c\ (c\ d - ab) - c^2\ (c^2\ b\ d) + a\ c\ (a\ c - d^2)$$

$$- b\ d\ (b\ d - a^2) + c\ d\ (b\ c - a\ d) - d^2\ (ac - d^2)$$

ó $\Delta = (a\,c - b^2)\ (a\,c - b^2) - (b\,d - a^2)\ (b\,d - a^2) - (b\,d - c^2)\ (b\,d - c^2)$

$+ (a\,c - d^2) - (a\,c - d^2) + (c\,d - a\,b)\ (b\,c - a\,d) + (b\,c - a\,d)\ (c\,d - a\,b)$

ó $\Delta = (a\ c - b^2)^2 - (b\ d - a^2)^2 - (b\ d - c^2)^2 + (a\ c - d^2)^2$

$$+ 2\ (c\ d - a\ b)\ (b\ c - a\ d)$$

Ejemplo III. — Desarrollar

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & \cos C & \cos B \\ \cos C & -1 & \cos A \\ \cos B & \cos A & -1 \end{vmatrix}$$

$$\triangle = -\begin{vmatrix} -1 & \cos A \\ \cos A & -1 \end{vmatrix} - \cos C \begin{vmatrix} \cos C & \cos B \\ \cos A & -1 \end{vmatrix} + \cos B \begin{vmatrix} \cos C & \cos B \\ -1 & \cos A \end{vmatrix}$$

$$= -(1-\cos^2 A) - \cos C\,(-\cos C - \cos A \cos B) + \cos B$$

$$(\cos A \cos C + \cos B)$$

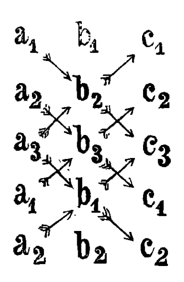
$= -1 + \cos^2 A + \cos^2 C + \cos A \cos B \cos C + \cos A \cos B \cos C + \cos^2 B$ que igualada á 0 da una relación conocida en Trigonometría.

29. *Regla de Sarrus.* — Sarrus dió una regla muy sencilla para desarrollar rápidamente las determinantes de 3.er grado. Consiste en lo siguiente:

Dada la determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

se repiten debajo de la 3.ª fila sucesivamente la 1.ª y la 2.ª, resultando así las 5 filas:



se escriben los 3 productos que resultan de multiplicar los 3 elementos en diagonal de arriba abajo y de izquierda á derecha, y los 3 productos que se obtienen multiplicando los 3 elementos en diagonal de sentido contrario; se da á los 3 primeros productos el signo + y á los 3 últimos el signo —; el conjunto de los 6 términos forma el desarrollo de la determinante.

Ejemplo. — Desarrollar por la regla de Sarrus la determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{aligned} &= 1\times2\times2+0\times0\times4+1\times2\times3 \\ &\quad -0\times2\times2-1\times0\times3-1\times2\times4 \end{aligned}$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{matrix} \quad = 4+6-8 = 2$$

Nota. — Para aplicar la regla de Sarrus á determinantes de grado superior al 3.º es necesario ante todo descomponer la determinante propuesta en determinantes menores de 3.er grado.

Ejemplo. — Desarrollar por la regla de Sarrus la determinante

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 6 & 4 & 2 & 8 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 6 & 4 & 1 & 8 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ 0\ 4\ 1 \\ 1\ 3\ 5 \end{array} - \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 6 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ 6\ 4\ 8 \\ 1\ 3\ 5 \end{array} + \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 6 & 4 & 8 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ 6\ 4\ 8 \\ 0\ 4\ 1 \end{array} - \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 6 & 4 & 8 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\ 6\ 4\ 8 \\ 0\ 4\ 1 \end{array}$$

$$=[0\times3\times1+1\times0\times1+3\times4\times5-1\times4\times1-0\times0\times5-3\times3\times1]$$

$$-[6\times3\times1+1\times0\times8+3\times4\times5-1\times4\times1-6\times0\times5-3\times3\times8]$$

$$+[6\times4\times1+0\times0\times8+3\times4\times1-0\times4\times1-6\times0\times1-3\times4\times8]$$

$$-[6\times4\times1+0\times3\times8+1\times4\times1-0\times4\times1-6\times3\times1-1\times4\times8]$$

$$=[60-4-9]-[18+60-4-72]+[24+12-96]-[24+4-18-32]$$

$$=47-2-60+22=69-62=7$$

30. *Teorema.* — *La suma de los productos de cada uno de los elementos de una columna ó fila, por las determinantes menores complementarias de otra columna ó fila, es nula.*

Sabemos que

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_1 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1\,\Delta(a_1) + a_2\,\Delta(a_2) + a_3\,\Delta(a_3) + a_4\,\Delta(a_4)$$

reemplazando en la igualdad a_1, a_2, a_3 . . por $c_1\, c_2\, c_3$ . . . resulta

$$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ c_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = c_1 \triangle(a_1) + c_2 \triangle(a_2) + c_3 \triangle(a_3) + c_4 \triangle(a_4) \text{ ó}$$

$$0 = c_1 \triangle(a_1) + c_2 \triangle(a_2) + c_3 \triangle(a_3) + c_4 \triangle(a_4)$$

31. *Teorema.* — *La suma de dos determinantes del mismo grado que sólo difieren en una fila ó en una columna, es otra determinante del mismo grado que tiene las filas ó columnas comunes: las no comunes están reemplazadas por una fila ó columna cuyos términos son respectivamente suma de las correspondientes de las filas ó columnas no comunes.*

Sean las determinantes

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ y } \triangle' = \begin{vmatrix} x_1 & b_1 & c_1 \\ x_2 & b_2 & c_2 \\ x_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

desarrollándolos por los elementos de la columna no común, que es la 1.ª

$$\triangle = a_1 \triangle(a_1) + a_2 \triangle(a_2) + a_3 \triangle(a_3)$$

$$\triangle' = x_1 \triangle(x_1) + x_2 \triangle(x_2) + x_3 \triangle(x_3) \text{ pero } \left| \begin{array}{l} \triangle(a_1) = \triangle(x_1) \\ \triangle(a_2) = \triangle(x^2) \\ \triangle(a_3) = \triangle(x_3) \end{array} \right.$$

luego $\triangle' = x_1 \triangle(a_1) + x_2 \triangle(a_2) + x_3 \triangle(a_3)$

y sumando ordenadamente la 1.ª igualdad con la 3.ª

$$\triangle + \triangle' = (a_1 + x_1) \triangle(a_1) + (a_2 + x_2) \triangle(a_2) + (a_3 + x_3) \triangle(a_3)$$

ó sea

$$\triangle + \triangle' = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & b_1 & c_1 \\ x_2 & b_2 & c_2 \\ x_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 + a_1 & b_1 & c_1 \\ x_2 + a_2 & b_2 & c_2 \\ x_3 + a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

NOTA. — Por medio del Teorema anterior se puede descomponer

una determinante en dos ó más del mismo grado, descomponiendo en dos ó más sumandos los elementos de una misma fila ó columna.

Ejemplo $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

Descomponer las determinantes en otras dos del mismo grado y de modo que una de ellas tenga los elementos de la 3.ª columna iguales á la unidad.

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

32. *Teorema. — Si los elementos de una columna ó fila son sumas de equimúltiplos de los elementos correspondientes de otras columnas ó filas, la determinante es nula.*

Sea la determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \quad \text{en que} \quad \begin{aligned} {}_1 &= m\,c_1 + n\,d_1 \\ a_2 &= m\,c_2 + n\,d_2 \\ a_3 &= m\,c_3 + n\,d_3 \\ a_4 &= m\,c_4 + n\,d_4 \end{aligned}$$

será (31)

$$\begin{vmatrix} m\,c_1 + n\,d_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ m\,c_2 + n\,d_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ m\,c_3 + n\,d_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ m\,c_4 + n\,d_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} m\,c_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ m\,c_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ m\,c_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ m\,c_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} n\,d_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ n\,d_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ n\,d_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ n\,d_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

$$= m \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ c_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + n \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ d_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = m \times o + n \times o = o$$

33. *Teorema. — Una determinante no varía cuando se agregan á cada elemento de una fila ó de una columna equimúltiplos de los elementos correspondientes de otras filas ó columnas.*

Sean las determinantes

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_1 + m\,b_1 + n\,c_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + m\,b_2 + n\,c_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + m\,b_3 + n\,c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad :$$

Son iguales; pues su diferencia es

$$\begin{vmatrix} m\,b_1 + n\,c_1 & b_1 & c_1 \\ m\,b_2 + n\,c_2 & b_2 & c_2 \\ m\,b_3 + n\,c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

34. *Cálculo rápido de las determinantes numéricas* — La práctica en el cálculo de las determinantes permite abreviar mucho las operaciones necesarias para obtener el valor de una propuesta. No es posible sujetar á reglas generales los procedimientos que deben seguirse para acelerar el cálculo, pues dependen de los casos que se presentan, cuya variedad es ilimitada; pero hay algunos preceptos que deben tenerse presentes y que son de utilidad, pues bien aplicados conducen á notables simplificaciones.

Estos preceptos son:

1.ª *Simplifíquese la determinante poniendo fuera de barras los factores que sean comunes á los elementos de cada fila ó de cada columna.*

2.ª *Transfórmese la determinante en otra equivalente en que los elementos de una fila ó de una columna sean iguales á 1.*

3.ª *Réstense de los elementos de una columna ó de una fila respectivamente los elementos correspondientes de todas las demás, á fin de transformar la determinante en otra equivalente que tenga todos los elementos de una fila ó de una columna iguales á 0, menos uno;* entonces la determinante equivaldrá ó otra de grado inferior en una unidad.

Apliquemos estos preceptos á los siguientes ejemplos:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{6 \times 2} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & 6 \\ 24 & 18 & 24 & 6 \\ 4 & 10 & 2 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 24 & 18 & 24 & 1 \\ 4 & 10 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 20 & 15 & 22 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 20 & 15 & 22 \\ 0 & -7 & 0 \end{vmatrix} = \frac{7}{2} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 20 & 22 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{7}{2}(22 + 60) = 7 \times 41 = 287$$

NOTA. — El alumno debe desarrollar la determinante por los métodos ordinarios, á fin de que pueda darse cuenta de las abreviaciones que se consiguen siguiendo el procedimiento indicado.

Ejemplo II.

$$\begin{vmatrix} 25 & 15 & 10 & 20 \\ 12 & 6 & 3 & 5 \\ 20 & 9 & 5 & 3 \\ 8 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 15 \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 4 \\ 12 & 2 & 3 & 5 \\ 20 & 3 & 5 & 3 \\ 8 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 15 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 1 & 9 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -15 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 9 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -15 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = +15 \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = + 15(-3-6)$$

$$= -135.$$

35. *Aplicación de las determinantes á la resolución de los sistemas de ecuaciones de 1.er grado.*

Sea el sistema:

$$\left.\begin{matrix} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 u = k_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 u = k_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 u = k_3 \\ a^4 x + b_4 y + c_4 z + d_4 u = k_4 \end{matrix}\right\} (H)$$

La determinante de los coeficientes de las incógnitas ordenada por los elementos de la 1.ª columna, que son los coeficientes de x, tiene la forma

$$\Delta = a_1 \Delta(a_1) + a_2 \Delta(a_2) + a_3 \Delta(a_3) + (a_4) \Delta(a_4)$$

Multiplicando cada ecuación por las determinantes menores complementarias de los respectivos coeficientes de x, que son $\Delta(a_1)$, $\Delta(a_2)$, $\Delta(a_3)$, $\Delta\, a_4)$, resulta

$$\begin{matrix} \Delta(a_1)\, a_1 x + \Delta(a_1)\, b_1 y + \Delta(a_1)\, c_1 z + \Delta(a_1)\, d_1 u = \Delta(a_1)\, k_1 \\ \Delta(a_2)\, a_2 x + \Delta(a_2)\, b_2 y + \Delta(a_2)\, c_2 z + \Delta(a_2)\, d_2 u = \Delta(a_2)\, k_2 \\ \Delta(a_3)\, a_3 x + \Delta(a_3)\, b_3 y + \Delta(a_3)\, c_3 z + \Delta(a_3)\, d_3 u = \Delta(a_3)\, k_3 \\ \Delta(a_4)\, a_4 x + \Delta(a_4)\, b_4 y + \Delta(a_4)\, c_4 z + \Delta(a_4)\, d_4 u = \Delta(a_4)\, k_4 \end{matrix}$$

Sumando ordenadamente

$$\left.\begin{array}{l}\Delta(a_1)\,a_1\\ \Delta(a_2)\,a_2\\ \Delta(a_3)\,a_3\\ \Delta(a_4)\,a_4\end{array}\right|\, x + \left.\begin{array}{l}\Delta(a_1)\,b_1\\ \Delta(a_2)\,b_2\\ \Delta(a_3)\,b_3\\ \Delta(a_4)\,b_4\end{array}\right|\, y + \left.\begin{array}{l}\Delta(a_1)\,c_1\\ \Delta(a_2)\,c_2\\ \Delta(a_3)\,c_3\\ \Delta(a_4)\,c_4\end{array}\right|\, z + \left.\begin{array}{l}\Delta(a_1)\,d_1\\ \Delta(a_2)\,d_2\\ \Delta(a_3)\,d_3\\ \Delta(a_4)\,d_4\end{array}\right|\, u = \begin{array}{l}\Delta(a_1)\,k_1\\ \Delta(a_2)\,k_2\\ \Delta(a_3)\,k_3\\ \Delta(a_2)\,k_4,\end{array}$$

vemos que el coeficiente de x es Δ y el de las demás incógnitas es o, luego

$$x = \frac{\Delta(a_1)\,k_1 + \Delta(a_2)\,k_2 + \Delta(a_3)\,k_3 + \Delta(a_4)\,k_4}{\Delta(a_1)\,a_1 + \Delta(a_1)\,k_2 + \Delta(a_3)\,a_3 + \Delta(a_4)\,a_4}$$

Para hallar el valor de y se ordenará la determinante por los coeficientes de y, de modo que $\Delta = \Delta(b_1)\,b_1 + \Delta(b_2)\,b_2 + \Delta(b_3)\,b_3 + \Delta(b_4)\,b_4$

se multiplicarán las ecuaciones (H) respectivamente por

$$\Delta(b_1),\ \Delta(b_2),\ \Delta(b_3),\ \Delta(b_4)$$

y se obtendrá $y = \dfrac{\Delta(b_1)\,k_1 + \Delta(b_2)\,k_2 + \Delta(b_3)\,k_3 + \Delta(b_4)\,k_4}{\Delta(a_1)\,b_1 + \Delta(b_2)\,b_2 + \Delta(b_3)\,b_3 + \Delta(b_4)\,b_4}$

y de una manera semejante resultaría

$$z = \frac{\Delta(c_1)\,k_1 + \Delta(c_2)\,k_2 + \Delta(c_3)\,k_3 + \Delta(c_4)\,k_4}{\Delta(c_1)\,c_1 + \Delta(c_2)\,c_2 + \Delta(c_3)\,c_3 + \Delta(c_4)\,c_4}$$

$$u = \frac{\Delta(d_1)\,k_1 + \Delta(d_2)\,k_2 + \Delta(d_3)\,k_3 + \Delta(d_4)\,k_4}{\Delta(d_1)\,d_1 + \Delta(d_2)\,d_2 + \Delta(d_3)\,d_3 + \Delta(d_4)\,d_4}$$

Observando estos resultados se ve que *el valor de cada una de las incógnitas es una fracción cuyo denominador es la determinante de los coeficientes de esas incógnitas, y cuyo numerador es el mismo*

denominador en que se cambia el coeficiente de la incógnita que se despeja, por la cantidad conocida.

Ejemplo

Sea el sistema

$$\begin{aligned} 3x + 2y - 3z &= 5 \\ 2x - y + 2z &= 1 \\ 2x + 3y + z &= 3 \end{aligned}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\triangle = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{29}{-30}$$

Nota.—Obsérvese que esta regla es la que hemos expuesto (7 con el nombre de regla de Cramer.

La propiedad territorial y el sistema Torrens

POR EL DOCTOR EDUARDO ACEVEDO

No hay, ciertamente, un solo abogado que pueda anticipar al cliente que le interroga sobre la bondad de un título de propiedad, con ánimo de adquirir ó prestar dinero bajo garantía hipotecaria, que estará libre de una acción de nulidad ó de una justísima demanda reivindicatoria.

Leerá los títulos y las escrituras matrices y los expedientes testamentarios, en que resulta que los actuales propietarios ó sus vendedores han sido declarados herederos y han recibido la finca en pago de su haber; y todos esos antecedentes, puede encontrarlos en forma y rigurosamente ajustados á la ley civil.

Pero al lado de todo eso *que se ve* y que puede consultarse, y sobre lo cual cabe abrir opinión profesional bien concienzuda, existe algo *que no se ve,* que no puede consultarse, y respecto de lo cual sería insensato que el letrado ó el escribano avanzaran opinión y dieran seguridades á su cliente.

Al día siguiente de extendida la escritura de venta ó de hipoteca, puede surgir, y surge con frecuencia, un coheredero que fué excluído en la partición de bienes, ó los representantes ó herederos de un incapaz, que ocultó su incapacidad en el acto del contrato, ó cualquier interesado que tiene mejor título sobre la propiedad ó que fué despojado de ella ó que adquirió ciertos derechos reales que no se hicieron conocer al desgraciado comprador.

Si la acción triunfa, el comprador del terreno y el acreedor hipotecario habrán perdido su dinero, salvo el recurso personal, muy problemático, contra el vendedor ó el deudor hipotecario; y si es el comprador quien triunfa, los honorarios y gastos de Juz-

gado se elevan siempre, á cifras importantes, que gravan al vencedor por efecto de la insolvencia ó mala fe de los que deberían cargar con ellos.

No terminan ahí los peligros para el que ha adquirido con el mejor y más saneado de los títulos.

Aun después de tomar la posesión y creerse el comprador al abrigo de toda acción, se intrusa un individuo en el campo ó en la finca comprada y no hay posibilidad de echarlo instantáneamente, sino después de un pleito dispendioso, y que á pesar de su carácter breve y sumario, siempre hay medio de alargarlo por varios años. Y si el propietario se ha descuidado durante un año, ya el intruso le gana la posesión y el pleito se complica y se hace mucho más largo y costoso, á poco que se maneje hábilmente la chicana y se cuente con la morosidad del procedimiento y falta de energía de los jueces y tribunales.

Se comprende sin esfuerzo, que un sistema de legislación que suprima en absoluto todos los peligros que amenazan al comprador y que además abarate los traspasos del dominio, tiene que contribuir á la valorización de la tierra y á su rápida y constante circulación, tanto como la deprimen y la traban hoy día las circunstancias de que acabamos de ocuparnos.

Ese sistema de legislación existe y se practica con grande éxito en varias partes del mundo, y si todavía no se ha difundido más, débese á una especie de preocupación, que asigna á la propiedad territorial rango distinto de las demás propiedades, preocupación explicable cuando la tierra era la única fuente seria de producción y lo que más valía y representaba, pero absurda y sin base en estos tiempos, en que la riqueza mobiliaria que se traspasa sin trabas ni peligros al comprador, ocupa lugar tan alto en el mundo de los negocios.

Nos referimos al sistema combinado por Sir Roberto Torrens y puesto en ejecución desde 1855 en la Australia Meridional y sucesivamente en Queensland, Victoria, Nueva Gales del Sud, Colombia Británica y en el Estado Iowa, de la Confederación Norte-Americana. Ives Guyot ha hecho activa propaganda para incorporarlo á la legislación francesa, y diversos publicistas ingleses han tratado y tratan de aplicarlo en Inglaterra. En muchas ciudades de Alemania forma, con ligeras variantes, la base fundamental de la legislación territorial.

Ante todo, vamos á extractar los preceptos capitales de la ley

Torrens, tal como quedó definitivamente modificeada por la "*Real property act de 1861.*"

(a) Existe una oficina de registro territorial, á cargo de un jefe y de un abogado, cuya misión redúcese á examinar los títulos de propiedad y emitir opinión profesional acerca de ellos.

Todo propietario puede dirigirse al jefe del registro, solicitando la inscripción de su título. La solicitud deberá mencionar la clase de su propiedad ó de sus derechos sobre el inmueble, así como todos los derechos reales pertenecientes á otras personas, el nombre del ocupante y el nombre y dirección de los propietarios linderos.

El jefe del registro puede exigir la presentación de los títulos, testamentos, testimonios que juzgue oportunos, así como recibir la declaración jurada del peticionario sobre la sinceridad con que procede. Exigirá también un plano levantado con arreglo á una escala dada, por un agrimensor público.

Si el abogado auxiliar considera que el título es incompleto ó irregular, ó que pesan sobre la propiedad hipotecas ú otras cargas reales no extinguidas, ó que existen otros interesados que no han suscrito la solicitud, rechaza de plano la inscripción, ó bien ordena que se publiquen edictos desde dos meses hasta tres años, á intervalos periódicos, haciendo saber el pedido de inscripción, á fin de que pueda deducirse cualquier reclamo. En caso de rechazo, puede el peticionario apelar ante el Tribunal.

Pero si considera que el inmueble pertenece real é inequívocamente al peticionario y que no está gravado con ningún derecho real, ó que si lo está, han concurrido también los dueños de esos derechos reales, entonces publica la solicitud por un plazo no menor de un mes ni mayor de un año, transcurrido el cual, si no se ha deducido oposición, queda el inmueble al amparo de la ley.

Durante el plazo, el jefe del registro puede mandar además que se notifique personalmente la petición á toda persona que del examen de los títulos, le parezca interesada.

Si se promueve oposición, el jefe del registro la notifica al peticionario y suspende todo procedimiento, hasta que el Tribunal competente se haya pronunciado en el litigio. La oposición queda prescrita á los tres meses, siempre que el opositor no justifique que ha comparecido ante el Tribunal respectivo, á gestionar el reconocimiento de su derecho.

Pero si no se produce oposición ó, si producida, ella no triunfa

ante el Tribunal, el jefe del registro entrega al peticionario un *certificado de título*, que acredita su calidad de dueño y al mismo tiempo, sella y archiva todos los documentos anexos á la demanda de inscripción. El mismo funcionario lleva un registro, llamado *matriz*, en donde inscribe todos los certificados que expide, teniendo cada inmueble un asiento distinto.

(b) Todo certificado de título debe mencionar las hipotecas, cargas, arrendamientos ú otros derechos reales que hubieran sido inscritos y de los que se tenga conocimiento. Hace plena fe en juicio y de que cada interesado es realmente dueño de los derechos con que figura en dicho documento.

(c) Cuando un inmueble se inscribe por primera vez, ó cuando ya inscrito cambia de mano por testamento ó ab-intestato, paga un impuesto proporcional que se destina á formar un fondo de seguro, para indemnizar á los terceros que hayan sido privados de un derecho real, por la inscripción del inmueble á favor de otras personas. En caso de insuficiencia, la indemnización se pagará con los dineros públicos.

(d) Ningún acto traslativo de propiedad ó constitutivo de hipoteca referente á un inmueble registrado, produce efecto alguno sino desde la fecha de la inscripción, con arreglo á la ley. Pero por el solo hecho del registro, todos los derechos que él acuerda quedan transferidos y reconocidos á favor del interesado, cualesquiera sean la naturaleza y el origen de los títulos que tuvieren otras personas sobre el inmueble; por manera que sólo se reputan existentes, las cargas y derechos mencionados en el registro.

Todas las anotaciones que se hagan en el registro, se escribirán también en el certificado de título.

En caso de venta ó hipoteca de un inmueble registrado, el vendedor firma un memorándum, transcribiendo el contenido del certificado de título y cargas ó arrendamientos que pesen sobre el inmueble ó adjuntando el mismo certificado, siempre que lo que se transfiera sea la plena propiedad. El jefe del registro expide entonces al comprador un nuevo certificado de título, refiriéndose á la concesión primitiva y al memorándum de venta.

Tratándose del arrendamiento de un inmueble registrado, deberá el propietario redactar el contrato refiriéndose al certificado de título. Ningún arrendamiento posterior á la inscripción de una hipoteca ó de otro gravamen, tendrá valor respecto del acreedor,

sino en el caso de que haya prestado su consentimiento antes de la inscripción.

Para la transferencia ó cesión de un crédito hipotecario, basta el endoso al dorso del título y su inscripción en el registro.

(e) Todo el que se considere con derecho sobre un inmueble, puede oponerse al registro de cualquier acto. El jefe del registro notificará la oposición al interesado, quien puede citar á su contradictor, para que promueva sus gestiones ante el Tribunal competente.

(f) El propietario de un inmueble ó de cualquier derecho real inscripto en el registro, puede nombrar un mandatario ó procurador, con facultad para vender, hipotecar, arrendar, etc., cuyo nombramiento será registrado, para que surta sus efectos.

(g) Ninguna demanda reivindicatoria se admite contra el propietario de un inmueble registrado; y la presentación ante los tribunales del certificado de título, constituye una excepción absoluta que elimina todo debate.

Exceptúanse los casos: en que el acreedor pide la ejecución de su deudor; en que el arrendador pide la expulsión de su arrendatario; cuando la reivindicación se dirige contra el supuesto propietario inscripto por fraude ó contra sus causa-habientes, exceptuados los compradores y acreedores hipotecarios de buena fe; cuando la reivindicación dimana de un error de límites ó sea promovida por un propietario que posee un certificado de título anterior y debidamente registrado.

(h) Toda persona privada de un inmueble ó de un derecho real, ya sea por fraude, ya por error ú omisión en el certificado de título ó en el registro matriz, puede demandar por daños y perjuicios al que ha aprovechado del fraude ó del error. Dicha acción prescribe á los seis años contados desde el despojo, cuyo término respecto de los incapaces, corre sólo desde el día en que cesa la incapacidad. Es entendido, sin embargo, que el comprador ó acreedor hipotecario de buena fe no pueden ser molestados, aun cuando se pruebe que su vendedor ó deudor ó sus causantes se hayan inscrito en el registro por fraude ó haya habido error en los límites.

En caso de muerte, ausencia ó quiebra del demandado, la acción se promueve contra el jefe del registro, al solo efecto de que la indemnización se pague del fondo de seguro.

(i) Las inscripciones hechas fraudulentamente, las castiga la ley con cuatro años de presidio como máximum.

Tales son las bases capitales de la ley Torrens, modificada por la *Real property act* de 1861, de que ya hicimos mención.

Como lo dice uno de sus comentadores, Mr. Dain, toda la economía del sistema Torrens, puede reducirse á tres puntos esenciales:

1.° Organización de un procedimiento para sanear los títulos, destinado á fijar el asiento de la propiedad, á deslindarla, y á consagrar de una manera irrevocable, respecto de todos, los derechos del propietario, en un título público.

2.° Creación de un sistema de publicidad, destinado á hacer conocer exactamente la condición jurídica del inmueble, los derechos reales y cargas que lo gravan.

3.° Movilización de la propiedad territorial, mediante un conjunto de medios, destinados á asegurar la trasmisión rápida de los inmuebles, la constitución fácil de las hipotecas y su cesión por vía de endoso.

El saneamiento de los títulos, se realiza de una manera bien sencilla. Recibida la solicitud de inscripción, el jefe del registro y el abogado auxiliar estudian los antecedentes, y si los encuentran en forma, ordenan que se levante un plano del inmueble y que se publiquen edictos con plazo de dos meses á un año, á fin de que todos los que se conceptúen interesados, salven sus derechos oponiéndose á la inscripción. Una vez vencido el plazo de los edictos, sin oposición y estando en forma los títulos, la oficina archiva éstos y expide un certificado en que consta la condición jurídica del inmueble y el nombre de su dueño, y á la vez extiende un asiento en el Registro matriz, que contiene los mismos datos.

Expedido el certificado y levantado el asiento, la ley no reconoce otro dueño que el designado en el certificado, ni otros derechos reales que aquellos que hayan sido inscritos en el registro.

Cualquier perjuicio que la inscripción cause á un tercero, privado de la propiedad ó de un derecho real, se resuelve desde entonces, en acción personal, de manera que las reivindicaciones quedan absolutamente proscritas y la propiedad asentada sobre bases inatacables, salvo el caso de inscripción fraudulenta.

Pero aun en ese caso de inscripción fraudulenta, no cabe la demanda contra el comprador ó el hipotecario de buena fe, los cuales quedan siempre libres de toda acción judicial.

La inscripción es facultativa, limitándose la ley á crear el registro, en la seguridad de que el propio interés de los propietarios y contratantes hará el resto de la obra.

Una vez, sin embargo, que el propietario ha registrado su inmueble, ya la condición jurídica de esa propiedad, queda exclusivamente fijada por las anotaciones del registro matriz y del certificado de título entregado al propietario.

Todo gravamen hipotecario, toda constitución de arrendamiento ó de otro derecho, toda venta, sólo existe y vale desde el momento en que sea registrada y anotada simultáneamente en la matriz y en el certificado.

Quiere decir, pues, que la matriz y el certificado reproducen en cada momento la condición jurídica del inmueble, de manera que en cinco minutos, cualquier comprador ó capitalista, que se proponga adquirir ó dar en hipoteca, quedan enterados del estado del inmueble y no tienen que preocuparse sino de establecer la identidad y la capacidad de su contratante.

Es posible que en algunos casos, la ley sancione una injusticia, privando de sus derechos reales á los propietarios ó acreedores que no hayan deducido su oposición en tiempo; pero los inconvenientes que puedan resultar en algunos casos, son pequeños frente á las inmensas ventajas de consolidar la propiedad, hacerla inatacable y valorizarla por lo mismo.

Por otra parte, prueba que esos casos son rarísimos, el hecho de que en la Australia no se conoce, al menos hasta ahora, ninguna demanda en que haya sufrido el Tesoro público, responsable, como ya lo dijimos, cuando no bastan los fondos del seguro. El mismo fondo de seguro permanece intacto, por ser contadas las demandas, y así resultaba en 1871 que la administración de la Colonia Victoria tenía en caja como fondo de seguro alrededor de cuarenta mil libras esterlinas y apenas había tenido que indemnizar por valor de dos mil libras.

En cuanto á la movilización de la propiedad territorial, el sistema Torrens la realiza admirablemente.

Si el propietario pretende vender, se limita á remitir su certificado de título al encargado del registro, adjuntándole á la vez una declaración de transferencia. En caso de encontrarse fuera del lugar en que tiene su asiento la oficina, el envío se hace por el correo, previa la autenticación de las firmas; y el encargado del registro procede á la entrega de un nuevo certificado al comprador y practica un nuevo asiento en el libro matriz.

Si pretende hipotecar, sigue el mismo procedimiento, remitiendo la respectiva declaración, ó todavía lo que es mucho más sencillo,

prescinde de la Oficina y entrega el certificado de título en prenda al acreedor hipotecario. Este último procedimiento es muy usado en Australia, por los agricultores que necesitan dinero entre una cosecha y otra. Desde que el inmueble no puede enajenarse sin la presentación del título en la Oficina de Registro, el hipotecario queda garantido y el préstamo se realiza sin gastos de ninguna especie.

Sólo en los préstamos á largo plazo, se acude á la Oficina de Registro, mediante una declaración escrita que se anota simultáneamente en el certificado y en la matriz, pudiéndose desde entonces ceder ó transferir el crédito hipotecario, por un simple endoso que también se inscribe del mismo modo.

Relativamente á la legislación hipotecaria, ha ido más allá la Alemania, y particularmente la ciudad de Bremen, en la cual todo propietario puede transformar su inmueble en bonos hipotecarios representativos de su valor, que circulan y se trasmiten por simple endoso.

Un propietario tiene un terreno que vale 100.000 pesos. Concurre á la Oficina de Registro Territorial y pide, por ejemplo, 5 bonos hipotecarios de 20.000 pesos cada uno. La Oficina los numera de 1 á 5, cuyo orden regirá en caso de ejecución, y los inscribe, haciendo constar en los bonos y en la matriz la condición jurídica del inmueble y todos los derechos reales que lo gravan. Cuando el propietario quiere hacer una hipoteca, limítase á endosar uno de esos bonos numerados y la garantía que recibe el capitalista es absoluta, puesto que mientras no se devuelven los bonos, la hipoteca queda inscrita y vinculada al inmueble.

Afirma Dain, que en la ciudad de Bremen, los propietarios tienen costumbre de convertir en bonos todos sus inmuebles y de guardarlos en sus cajas, hasta que les conviene endosarlos para hacerse de dinero, sin otro gasto que el de la tinta del endoso.

Quedan indicados ya los lineamientos generales del sistema Torrens, cuyo sistema vuelve tan barata, rápida y segura la trasmisión de un inmueble ó la constitución de una hipoteca, como el traspaso de un conforme de comercio ó de un título de deuda cualquiera.

En 1880, el gobierno inglés envió una circular á los gobernadores de las colonias australianas, pidiéndoles datos acerca del funcionamiento del sistema Torrens; y según declara Ives Guyot en el *Journal des Economistes* de Octubre de 1882, todos los go-

bernadores contestaron afirmando el completo éxito del sistema y sosteniendo que en la Australia del Sud, es casi una curiosidad encontrarse con un terreno que todavía no se encuentre registrado y al amparo de la famosa ley territorial. En Queensland, más de un 98 °/₀ de la tierra estaba registrado á fines del año 1879, y en Victoria, declaraba el Jefe del Registro, que había inscripto títulos. desde un valor de 5 libras á 100.000 libras esterlinas y transacciones en número de 537.000, hasta el año 1880.

Aunque el sometimiento al sistema Torrens es completamente voluntario, en la Australia ya se ha hecho el hábito de que nadie compra una propiedad ni la recibe en hipoteca, sino después de registrada, de manera que los propietarios se sienten fuertemente impulsados á inscribirlas, para hacer fácil su circulación en cualquier momento.

En 1879, se promovió una información tendente á estudiar los medios de aplicar en Inglaterra ese sistema que tan brillantes resultados obtenía en las colonias de Australia; pero se hizo un argumento, que aunque debilísimo, sirvió de base de resistencia á la gran reforma que se proyectaba.

Es difícil, se decía por los opositores, á cada propietario inglés producir sus títulos, á menos de provocar una liquidación penosa. El sistema, agregaban, puede convenir y conviene á un país nuevo, pero no á un país viejo como la Inglaterra.

Pero acaso al país viejo no le conviene sanear y hacer fácilmente trasmisible su propiedad territorial? Y sobre todo, no es acaso una de las bases capitales del sistema Torrens, el dejar á la espontaneidad y al interés de los propietarios el recurrir ó no recurrir á la Oficina de Registro? Y aun cuando se provocara una liquidación gradual, no sería ella un mal insignificantísimo al lado de las grandes y positivas ventajas que reporta á toda la sociedad el sistema Torrens?

Refiere Ives Guyot, que cuando Roberto Torrens propuso su ley en Australia, encontró una violenta oposición de parte de los escribanos y procuradores, que veían sus intereses amenazados y su protocolo fundido; y agrega que en Inglaterra la oposición parte también del mismo gremio, que se defiende como se defendían los dueños de diligencias contra la invasión de los caminos de fierro.

La transferencia de bienes inmuebles y la constitución de derechos reales de todo género, se hace bajo el sistema Torrens, con la sola intervención del *Registro Territorial*, de manera que

los abogados, procuradores, y principalmente los escribanos, tienen que perder una parte considerable de su clientela; pero, como lo dice Ives Guyot, esa pérdida no se hará sentir para los individuos ya comprometidos en su carrera, que, al contrario, tendrán durante algunos años que intervenir en una especie de liquidación de litigios latentes, de títulos dudosos y de grande actividad judicial. Hecha la liquidación, terminada la fiebre forense, resultará lo que en Australia: en vez de seguirse esas carreras que quedan sin clientela, se siguen otras quizá más útiles y beneficiosas para todos.

En países nuevos como la República Oriental, que se forman y progresan principalmente por la afluencia de hombres y de capitales extranjeros, nadie negará, ciertamente, la conveniencia que habría en incorporar el sistema Torrens á la legislación territorial.

La tierra es entre nosotros el capital que más se mueve y el más buscado, ya para adquirirlo en propiedad, por el que desea consolidarse una renta ó trabajarlo, ya por el que desea simplemente buscarse una sólida garantía que asegure la devolución de los capitales prestados.

De los Anuarios que publica nuestra Dirección de Estadística, resulta que en los 5 años transcurridos desde 1887 á 1891 inclusive, el precio de los bienes raíces vendidos en toda la República Oriental asciende á *165:748.049* pesos, y el monto del dinero que en ese mismo lapso de tiempo se ha prestado en hipoteca, pasa de 80 millones de pesos. Sumando los dos guarismos, se ve que el valor total de las propiedades raíces enajenadas y del capital dado en préstamo hipotecario, asciende en los cinco años á la enorme cantidad de *246* millones de pesos oro.

En los mismos cinco años el valor de nuestras importaciones, fué de 142:290.302 pesos y el de las exportaciones de 128:718.146 pesos, representando así nuestro comercio especial exterior *271* millones de pesos, ó sea una cifra que poco excede á la de la movilización de la tierra.

Cierto es que en los registros de venta y de hipotecas figuran á veces simultáneamente los mismos valores, como, por ejemplo, cuando se compra una propiedad sin pagarse todo el precio, sino una parte é hipotecándose la misma propiedad á favor del vendedor por el resto. Cierto también, que en el registro de hipotecas anótanse simples prórrogas de hipotecas anteriores, que no hacen circular nuevos capitales.

Pero con todas las reducciones que razonablemente se hagan, queda siempre en pie un guarismo altísimo, que revela la fuerza de esa corriente de metálico, que busca en la propiedad territorial su colocación preferida.

Si la corriente manifiesta tanta energía y tanto poder, bajo la actual legislación territorial, en que las transacciones son caras, debido á la intervención de escribanos y abogados, forzosamente lentas, por el previo examen de títulos y revisación de los registros, quedando además siempre en el aire y expuestas á reivindicaciones y demandas de nulidad, puede calcularse cuál sería la magnitud de esa misma corriente de metálico, bajo el imperio de la ley Torrens y de la rapidez, baratura y seguridades absolutas que ella crea.

No sería tan sólo el dinero del país, el que afluiría á una colocación barata é inatacable: sería también y principalmente el capital europeo.

El interés normal en Europa es del 2 y $^1/_2$ al 4 $^0/_0$, mientras que entre nosotros las fincas producen el 8 ó el 9 $^0/_0$ líquido y los préstamos hipotecarios, reditúan todavía un interés más alto.

Suponiendo que el sistema Torrens fuera incorporado á nuestra legislación, la plena y absoluta garantía que ese sistema establece para las ventas de inmuebles y constitución de hipotecas, tendría que atraer el capital europeo, que con sólo cruzar el océano obtendría pingües ganancias, con gran provecho para nuestra circulación monetaria y nuestras industrias todas.

Otra de las inapreciables ventajas del sistema Torrens, consistiría en el levantamiento del catastro, sin gastos para el Estado, puesto que los mismos propietarios lo costearían en las condiciones menos gravosas que cabe imaginar.

Desde que ninguna propiedad se registra en el sistema Torrens, sino después de medida y deslindada, bastaría establecer que los planos se formasen con arreglo á una escala dada y sobre la base de una triangulación previamente practicada por la Dirección de Obras Públicas.

Sobre esos fundamentos, el interés privado haría todo lo demás, pues la experiencia demuestra en Australia, que aunque el registro es meramente facultativo y la ley no lo impone, en el hecho ningún capitalista compra un inmueble ni presta un centésimo sobre hipoteca, sino tratándose de propiedades registradas en forma.

18

Y desde que todo cambio en la propiedad registrada, toda venta, toda partición entre herederos, todo derecho real tiene forzosamente que inscribirse y anotarse en el registro, el catastro se mantendría siempre al día y al corriente de las últimas modificaciones sufridas por cada inmueble.

Entre las grandes ventajas del sistema Torrens, en nuestro país, vale la pena de señalar también la desaparición de los pleitos posesorios, esa verdadera plaga de toda nuestra campaña, que se desencadena y arruina al propietario, cuyo título saneado lo pone al abrigo de toda demanda reivindicatoria.

Ningún propietario rural está libre de que un intruso le invada su campo y le discuta la posesión y pida plazos para probar y prolongue por largo tiempo la invasión. Y si por cualquier circunstancia, el intruso antes de ser demandado ha poseído durante un año, el pleito se complica y se hace mucho más largo y dispendioso.

Dentro del sistema Torrens no existen, entretanto, otros derechos reales que los anotados en el libro matriz y en el título, de manera que con el título en la mano y sin admitirse ningún género de prueba, los Tribunales desalojarían al intruso, sin perjuicio de que si se considera asistido de algún derecho real no registrado, deduzca sus acciones personales y obtenga las indemnizaciones á que haya lugar.

Todas estas ventajas pueden obtenerse, rodeando, sin embargo, de las mayores y más eficaces garantías los intereses vinculados á la propiedad territorial.

Desde luego, y como garantía principal, puede y debe funcionar el sistema Torrens simultáneamente con la legislación actual, como ocurre en Australia y en los demás puntos en que rige aquel sistema tan beneficioso.

El sometimiento al registro debe ser completamente espontáneo del propietario, á condición, es claro, de que una vez registrado el inmueble, ya quede regido exclusivamente por el sistema Torrens, de manera que, respecto de ese inmueble, no tengan existencia sino los derechos reales anotados en el registro matriz y en el certificado del título.

Por lo demás, como lo hemos dicho, el interés particular de los compradores é hipotecarios, se encarga rápidamente de someter todo el territorio al régimen del registro, que es el único que ofrece plenas y absolutas seguridades á la colocación de los capitales.

En segundo lugar, la inscripción podría rodearse de formalidades tan eficaces como se quisiera, ampliando algo la jurisdicción que reconoce á los tribunales la ley Torrens.

La ley Torrens establece que si el encargado del registro y el letrado auxiliar encuentran el título en buena y debida forma y concurren todos los que tengan derechos reales sobre el inmueble, dichos funcionarios aceptan la inscripción, limitándose previamente á publicar edictos con plazo que varía desde dos meses á un año.

Habría conveniencia, entretanto, en establecer que el fallo favorable de la Oficina de registro debería ser confirmado por el Tribunal, sin cuyo requisito no se practicaría la inscripción del inmueble.

En tercer lugar, el plazo de los edictos, en vez de oscilar entre uno y doce meses, como en el sistema Torrens, debería ser de seis meses como mínimum, que es lo que rige en algunas colonias australianas, á fin de que siempre hubiera un plazo suficientemente largo para las oposiciones al registro. El término sería de seis meses á tres años, cuando los títulos adolecieran de algún defecto á juicio de la Oficina y del Tribunal.

Claro está que esos plazos se refieren exclusivamente al registro del inmueble, pues una vez practicada la inscripción, las transferencias de dominio y constitución de derechos reales, sólo requerirían, como en la ley Torrens, el simple consentimiento por escrito, previa autenticación de firmas, en el libro matriz y en el certificado de título, según ya lo hemos visto.

En cuarto lugar, sería sensato suprimir la responsabilidad del Estado, en los casos de lesión de los derechos de un tercero. Establece la ley Torrens, que cuando el registro hiere los intereses de un tercero ó lo despoja de su derecho, el perjudicado puede accionar contra el fondo de seguro, y siendo éste insuficiente, contra el Estado, siempre que no pueda hacer efectiva la indemnización contra el causante del daño ó del despojo.

Si bien la experiencia de toda la Australia no registra hasta ahora un solo caso en que se haya hecho efectiva esa responsabilidad, y hasta demuestra que son rarísimas las acciones contra el fondo de seguro, habría conveniencia en proscribir toda acción contra el Estado, tal como lo ha hecho la ley en que el Gobierno francés introdujo el sistema Torrens en Túnez.

Con éstas y otras modificaciones que el ensayo práctico del sis-

tema Torrens fuera sugiriendo, podría y debería acometerse en la República la gran reforma destinada á sanear la propiedad raíz y abaratar singularmente la circulación de la riqueza territorial, esa misma gran reforma, á la que debe en buena parte la Australia su portentoso desenvolvimiento.

Más se conseguiría ciertamente, en la atracción de hombres y capitales europeos y en la misma movilización del capital nacional, con la ley Torrens, que con cualquier otro arbitrio ó procedimiento, ahora, sobre todo, en que el crédito público está abatido, y podríamos presentar la tierra saneada como colocación magnífica y absolutamente segura al dinero qne huye de los demás empleos.

Facultad de Matemáticas Superiores

PROGRAMA

DE MATERIALES DE CONSTRUCCIÓN

I

Materiales de construcción

Objeto y división de su estudio — Materiales de origen pétreo — Principales condiciones á que deben satisfacer las piedras — Influencia destructora de los agentes atmosféricos — Piedras heladizas — Método para reconocerlas — Procedimientos seguidos para contrarrestar la acción destructora de los agentes atmosféricos — Método de silicatación de *Fusch* — Método de *Daines*—Otros defectos de las piedras — Clasificación de las mismas — Piedras arcillosas, calcáreas, yesosas, etc.

II

Canteras

Explotación al descubierto — Generalidades —Empleo de sustancias explosivas — Barrenos — Disposición, apertura y carga de los mismos — Atacadura — Mecha ordinaria y de seguridad — Explosión — Métodos de *Robers,* de *Verdú* y de *Cuberbaisse* — Aparato de Breguet — Hornillos — Método de pozos y galerías — Otras sustancias explosivas — Nitroglicerina, sus propiedades, preparación y usos — Dinamita, su clasificación y modo de usarla — Otros explosivos — Explotación por arranque y subterránea.

III

Preparación de los bloques

División de los mismos — Desbaste y labra — Aserramiento — Distintas clases de labra — Pulimento y brillo.

Morteros y Hormigones

Cales — Piedras calizas — Su composición — Calcinación — Generalidades — Clasificación — *Calcinación al aire libre por capas* — Construcción de la calera — Carga de la misma — Calcinación con llama — *Calcinación en hornos* — Generalidades — Calcinación intermitente y con llama — Calcinación continua con llama — Calcinación continua por capas — Descripción del horno, sus dimensiones, carga, etc. — Cantidad y calidad del combustible — Inconvenientes que deben evitarse para la obtención de buenas cales — *Formas teóricas de los hornos* — Hornos con hogar — Hornos en que se efectúa la calcinación continua por capas — Dificultades que ofrece la calcinación — Hornos de *Vicat* y de *Chanard* — Coste de un metro cúbico de cal.

IV

Clasificación de las cales

Caracteres distintivos de las cales *grasas, áridas, hidráulicas* y *límites* — Cementos romanos, de *Parker,* ó de fraguado rápido — Resumen de la clasificación anterior.

Explicación del endurecimiento de las pastas de cal

Influencia de las causas extrañas, como son: las sustancias *volátiles,* la sílice, la alúmina, los óxidos de hierro y de manganeso, la magnesia, el ácido sulfúrico y los sulfuros del ácido fosfórico, la potasa, la sosa, el ácido carbónico, etc. — Fraguado de las *cales grasas, hidráulicas* y *cementos* — Teoría de *Le Chatelier.*

V

Cales y cementos artificiales

Fabricación de las cales hidráulicas — Procedimiento de simple cochura — Procedimiento de doble cochura.

Fabricación de cementos — Fabricación del *Portland* — Cementos más notables — Su composición — Procedimientos — Cochura, desecación, hornos, combustible, etc. — Conocimiento de las cales y cementos más notables del extranjero — Estado actual de esta industria en la República Oriental.

Apagamiento de las cales

Apagamiento por *fusión ó en balsas* — Aumento de volumen que produce la hidratación — Cantidad de agua que debe emplearse — Relación entre el *volumen* de la pasta y el *peso* de la cal — Lechada — Apagamiento por *inmersión ó aspersión* — Preparación de la pasta — Apagamiento espontáneo.

Conservación de las cales

Conservación de las cales grasas en *pasta vivas* y *en terrón* — Condiciones que deben tener los depósitos — Conservación de las cales apagadas en polvo — Conservación de los cementos.

VI

Puzolanas

Puzolanas naturales — Origen, caracteres y composición de las mismas — Sus analogías y aplicaciones.

Puzolanas artificiales — Arcillas preferibles — Temperatura de la cocción y modo de efectuarla — Operaciones que requiere su fabricación — Otras substancias de propiedades análogas — Condiciones del agua para la fabricación de morteros.

Arena

Su origen, clasificación y condiciones — Sus aplicaciones é influencia que ejercen en los morteros.

Densidad y huecos — Densidad de la arena — Valuación de los huecos en relación con la arena.

Composición y propiedades de las argamasas, morteros de cales grasas é hidráulicas

Objeto y condiciones de la arena — Definición — Objeto de la arena — Influencia de su tamaño — Relación entre los volúmenes de la pasta de cal y la arena — Morteros poco compactos, propiamente dichos y áridos – Consistencia que deben tener — Endurecimiento — Cualidades que adquieren los morteros endurecidos — Resistencia.

VII

Morteros de cementos romano

Objeto de la arena — Proporción entre el cemento y el agua — Proporción entre la arena y el cemento — Preparación de los morteros de cemento — Endurecimiento de estos morteros — Cualidades que adquieren los morteros de cemento después de fraguar — Resistencia á la tracción — Resistencia á la compresión — Condiciones requeridas para su admisión.

Morteros de cal, grasa y cemento — Su analogía con la cal hidráulica ordinaria — Fabricación de estos morteros.

Morteros de cemento de Portland

Ingredientes de que constan — Molienda — Peso de estos cementos — Objeto y condiciones de la arena — Composición de estas mezclas y proporcionalidad de sus componentes — Preparación de los morteros de Portland — Su endurecimiento, resistencia y dilatación — Cementos de Portland con cloruro cálcico — Morteros de cales ordinarias y de Portland — Condiciones de recepción.

VIII

Pastas puzolánicas

Su composición — Proporción de sus elementos — Objeto de la arena — Preparación y fraguado de estas pastas — Su resistencia.

Hormigones

Definición y aplicación de los mismos — Sus componentes — Proporción en que deben emplearse — Resistencia — Lechadas.

Otras piedras artificiales

Hormigones de arcilla — *Aglomerados de Coignet* — Su composición, preparación y fraguado — Diferencia entre estos aglomerados y los morteros de cal, ó de cal y cemento ordinario — ***Piedras artificiales silicatadas.***

Fabricación de morteros de cal

Batidura y amasado de los morteros — Precauciones que deben adoptarse en su fabricación — Condiciones exigidas en Bélgica — Manipulación de los morteros.

Fabricación mecánica— Molinos — Descripción de los de *París* y *Liverpool* — Máquinas de rastrillo — Toneles amasadores de *Bernard* y de *Roger* — Máquinas de helicoide.

IX

Fabricación de hormigones

Manipulación — Fabricación mecánica por medio de carretones, de cajones y de hormigoneras.

Yeso

Su composición, caracteres y variedades principales — Anhidrita — Cochura intermitente por medio del *horno de campo* y de *hornos fijos* — Cochura por capas — Cochura continua en hornos ordinarios, por medio del vapor y en *hornos helicoidales* — Carga de los hornos y molienda — *Aplicaciones del yeso* — Morteros y enlucidos — Conservación del yeso — Su dilatación al fraguar — Tabiques y bóvedas — Estuco de yeso — Estuco de cal — Moldeo — Yeso alúmbrico.

X

Betunes

Betunes calizos de *Vauban*, de *Loriot* y *Zulaque* — Betunes metálicos de *Dihl* y de limaduras — Betunes para empotrar hierros en piedra — Masilla de vidriero — Betún de cantero y betún hidrófugo — Betunes naturales — Su extracción — Explotación de canteras — Machaqueo — Pulverización de las piedras bituminosas — Cernido — Fabricación de panes asfálticos — Fabricación del betún asfáltico — Aplicaciones del asfalto en la construcción — Betunes asfálticos artificiales — Betunes resinosos, su composición y preparación – Fabricación de betunes resinosos — Principales defectos de estos betunes.

XI

Pastas cerámicas

Definición — Composición y propiedades de las arcillas — Arcillas plásticas — Arcillas esmécticas — Arcillas figulinas — Arcillas compuestas — Caolines — Ladrillos — Cualidades que deben tener las tierras destinadas á fabricarlos — Inconvenientes de que la arcilla sea muy arenácea ó muy pura — Cuerpos que se agregan á las tierras para modificarla.

Fabricación — Reseña histórica — Adobes, su preparación y empleo — Ladrillos cocidos, sus dimensiones más comunes y operaciones que comprende su elaboración — Medios de reconocer su bondad — Preparación de las pastas — Excavación de tierras — Exposición á los agentes atmosféricos — Adición de sustancias — Amasadura en depósitos y en albercas.

XII

Manipulación de los ladrillos

Moldeo — Procedimiento español, francés, ó belga é ingles.

Desecación — Su objeto — Condiciones del secadero — Desecación previa — Perfiladura y compresión — Desecación definitiva espontánea y artificial.

Cochura — Generalidades — Cochura en hormigueros — Cochura en hornos definitivos.

Clasificación de hornos — Hornos intermitentes descubiertos y cubiertos — Hornos continuos de hogar móvil y de carga móvil — Hornos regeneradores — Horno anular de Hoffmann.

XIII

Fabricación mecánica de ladrillos

Amasadera de *Clayton.*

Moldeo mecánico — Generalidades y clasificación — Máquinas de émbolo — Máquinas laminadoras — Máquinas de helicoide — Máquinas de molde cortante — Máquinas compuestas — Máquinas de *Clayton.*

Prensadura mecánica — Objeto de la prensadura — Prensa de *Clayton.*

Clasificación de los ladrillos — Ladrillos aplantillados — Ladrillos huecos, sus ventajas, resistencia, fabricación, costo y aplicaciones — Ladrillos refractarios y flotantes — Ladrillos hidráulicos.

XIV

Otras pastas cerámicas

El Pirogranito — Procedimiento de fabricación — Sus componentes, propiedades y aplicaciones.

Baldosas — Sus condiciones y clasificación — Modo de fabricarlas — Condiciones que deben tener — Alisadura.

Mosaicos — Moldeo, prensadura y cocción.

Azulejos — En qué se diferencian de las baldosas — Esmaltado y dibujo — Clasificación y aplicaciones.

Tejas — Clasificación, fabricación y condiciones que deben tener.

Botes y caños — Aplicaciones, moldeo y clasificación de los botes — Caños de barro —Sus aplicaciones, moldeo y clasificación.

Tubos de avenamiento — Sus formas y dimensiones — Su fabricación, moldeo, cochura y secadura.

Vidriado y colores — Objeto del vidriado — Método para vidriar — Preparación del *esmalte blanco* y *barnices ordinarios*—Obtención de colores para la cerámica fina.

Fabricación del vidrio

Vidrios ordinarios — Su composición y propiedades — Fusión — Fabricación por el soplo — Extensión.

Vidrios del comercio — Vidrios comunes, raspados, de colores y lunas.

Tubos de vidrio — Sus dimensiones, fabricación y aplicaciones.

Vidrio templado.

XV

Materiales de origen vegetal

Organografía

Célula — Constitución de la misma.

Tejidos — Su división y definición de cada uno.

Organos compuestos — Clasificación de ellos.

Organos de nutrición — Raíz, tallo, yemas, hojas y otros órganos secundarios.

Organos de reproducción — Su división y definición.

Floración y reproducción — Organos que desempeñan estas funciones.

Fisiología

Clasificación — Funciones de nutrición — Funciones de reproducción.

Maderas

Época de la corta — Apeo de los árboles — Sistemas de explotación y repoblación de montes — Apeo por cuartetes, entresacas, talas, resalvos, siembra, estacas, plantones y viveros.

Procedimientos distintos de apeo — Apeo con hacha y con sierra — Corte del árbol y las raíces — Aplicación de la dinamita y de la electricidad.

XVI

Caracteres de las maderas más importantes

Clasificación de las maderas

Maderas duras — Caracteres generales — Caracteres especiales y principales aplicaciones de las siguientes: *Roble* y *encina, castaño, olmo, nogal, haya, fresno* y *eucaliptus.*

Maderas resinosas — Caracteres generales — Caracteres especiales y principales aplicaciones de las siguientes: Pino, abete, pinabete y pinsapo, alerce, ciprés, araucaria wellingtonia y cedro.

Maderas blandas — Caracteres generales de estas maderas y especiales del álamo blanco.

Maderas finas — Caracteres generales — Denominación de las principales maderas de este grupo.

Maderas exóticas usadas principalmente en esta República.

Maderas de construcción de la República Oriental -- Observaciones sobre la densidad y resistencia de las maderas.

XVII

Enfermedades y defectos de los árboles en pie

Ulceras, chancros y lagrimales — Caries — Goteras y grietas — Grietas ó fendas — Pie de gallo, pata de gallina ó simple pudrición — Pudrición roja y tabaco — Madera pasmada, heladura ó atronadura — Acebolladura, colaña ó cebolla — Fibras torcidas ó reviradas — Defoliación cortical — Verrugas, tumores, lupias ó lobanillos, etc. — Brotos quemados — Defoliación, ictericia y tizón — Plantas parásitas, etc. — Nudos ó clavos, doble albura y filomanía.

Causas de destrucción de las maderas cortadas — Madera recalentada ó quemada — Carcoma — Pudrición blanca, caries seca.

Condiciones de las maderas que deben usarse — Condiciones generales — Maderas que deben desecharse.

Causas de destrucción de las maderas puestas en obra — Piezas resguardadas de la intemperie — Piezas sumergidas en agua dulce — Influencia de la humedad y sequedad — Piezas sumergidas en el agua salada.

XVIII

Conservación de las maderas

Procedimientos que se emplean

Enlucidos y forros — Enlucidos protectores comúnmente empleados — Forros más convenientes.

Inyección de substancias antisépticas — Sus efectos — Cuál es la causa de que la madera se destruya — Por qué los antisépticos preservan las maderas — Opinión de Rondelet — Inmersión en agua dulce y salada — Antisépticos más usados — Clasificación de los métodos de inyección.

Inyección por inmersión — Inmersión en frío y en caliente — Inmersión en baño hirviendo — Inmersión en caliente, después de secar las piezas.

Procedimiento de Boucherie — Descripción — Solución preferible y su preparación — Resultados obtenidos.

Inyección por el vacío y la presión — Descripción — Antisépticos usados con este procedimiento — Modo de proceder según que el líquido sea el *cloruro de zinc ó la caparrosa azul*, *la creosota ó el aceite de alquitrán*, y la *creosota ó el cloruro de zinc* — Ventajas é inconvenientes de este sistema.

Coloración, incombustibilidad y *petrificación* — Coloración — Incombustibilidad — Cuerpos más usados para conseguir este objeto — Petrificación — Procedimiento de *Folbaci*.

Carbonización superficial — Método de *Lapparent* y sus resultados — Método de *Hutin* y *Boutigni*, operaciones necesarias y resultados obtenidos.

XIX

Labra de maderas

Maderas del comercio — Marcos — Desmoche y troceo — Hendimiento.

Escuadración — Escuadración con hachas de piezas rectas — Escuadración con hachas de piezas curvas — Escuadración con sierra.

Aserramiento á brazo.

Aserramiento mecánico — Sierras rectas, circulares y de contornear.

Preparación de maderas de sierra — Aserramiento por los radios medulares — Aserramiento holandés, etc.

Encorvadura de maderas — Maderas curvas naturales — Encorvadura de árboles en pie — Encorvadura de piezas ordinarias — Reblandecimiento con el fuego, con agua hirviendo y por medio del vapor y de la arena — Modo de encorvar las maderas reblandecidas.

XX

Transformación de las piezas hasta colocarlas en obra

Operaciones y herramientas ordinarias

Herramientas mecánicas — Máquinas de perforar, de escoplear y de acepillar.

Transporte de maderas

Transporte en el monte — Caminos — Transporte de las piezas — Rodaderos naturales y artificiales.

Transporte por caminos ordinarios — Trinquibal — Precauciones que deben tomarse para la carga.

Transporte por agua — Transporte á madera perdida, en balsas y en barcos.

Transporte desde los almacenes, según que las piezas sean pequeñas, grandes y muy pesadas.

Almacenaje de maderas

Conveniencia del almacenaje — Apilamiento — Condiciones á que deben satisfacer los almacenes.

XXI

Otros materiales vegetales

Cañizos, ramajes y tepes — Empleo de estos materiales — Propiedades que les caracterizan — Composición y uso de los *cañizos.*

Materiales de ramajes — Zarzos, faginas, salchichones y cestones.

Tepes — Definición, usos y resistencia.

Cuerdas

Aplicaciones — Materia prima — Preparación del cáñamo — Filástica — Ramales, cabos y cables — Clasificación — Fabricación de cuerdas embreadas, forradas y planas — Condiciones á que deben satisfacer.

Gomas, resinas y otros productos

Clasificación y composición.

Gomas — Procedencia de la *arabina, cerasina* y *basorina* — Propiedad de las gomas.

Resinas — Propiedades generales — Clasificación.

Resinas propiamente dichas — Trementina, esencia de trementina ó aguarrás, colofonia ó pez griega y resina común.

Otras resinas de menor importancia — Almáciga, sandáraca, resina copal, laca, sangre de drago y resina elemí.

Gomorresinas — Denominación de las más principales — La gutagamba.

Oleo-resinas — Trementina ordinaria, resina de pino ó galipodio y pez de Borgoña — Productos de la trementina.

Caucho ó goma elástica

Procedencia y obtención de este producto — Modo de purificarlo — Sus propiedades y aplicaciones — Vulcanización — Ebonita.

Gutapercha — Propiedades y aplicaciones.

XXII

Materiales metálicos

Minerales de hierro — Otros minerales metálicos — Separación y clasificación.

Trituración — Cilindros lisos y acanalados — Criba hidráulica — Bocartes.

Lavado — Cajas fijas — Mesas durmientes — Mesas de percusión — Mesas cónicas.

Torrefacción ó calcinación — Su objeto — Cuándo puede suprimirse esta operación.

Hornos — Su clasificación — Hornos de cuba — Hornos de reverberos — Hornos de crisoles y retortas — Otras clases de hornos.

XXIII

Hierro y su metalurgia

Minas de que se extrae — Propiedades.

Procedimiento catalán — Descripción de la fragua — Carga del horno — Marcha de la operación — Casos en que es conveniente este método — Gasto de combustible — Acero natural.

Procedimiento de altos hornos — Descripción del horno — Disposición de sus paredes y toberas — Carga — Fundentes — Combustibles.

Teoría de los hornos altos — Reacciones químicas que se operan al ascender la corriente de aire — Transformación del aire en anhidrido carbónico y de éste en óxido de carbono — Regeneración del anhidrido carbónico — Corriente inversa.

Perfeccionamientos — Empleo del aire caliente — Aprovechamiento de gases.

Productos de los hornos altos — Causas que influyen en la calidad de los mismos — Caracteres de los hierros colados, grises, manchados y blancos — Hierros colados maleables.

XXIV

Transformación del hierro fundido en dulce

Teoría química de la transformación — Dificultades en la práctica — Procedimientos.

Afinación en forjas — Descripción del horno — Marcha de la operación — Combustible.

Afinación en hornos y pudelación — Afinación — Pudelación — Hornos de pudelar.

Pudelación perfeccionada — Hornos hervideros — Pudelación por vapor — Pudelación silesiana.

Trabajo del hierro para darle la textura conveniente

Máquinas de cinglar — Ventajas é inconvenientes de cada clase de máquinas — *Prensas Esquizer*, *Brown* y *horizontal* — *Martinetes* — Sus dimensiones y potencia — Clasificación — Modo de trabajar los martinetes — *Laminadores de cinglar* — Su descripción y manera de trabajar.

Medios de dar al hierro la forma conveniente

Máquinas que se emplean — Clasificación de los hierros según su forma — Hierros de formas sencillas y complicadas.

Hierros usuales en el comercio — Su clasificación — Forja en martinetes y en laminadores — Costo de los hierros — Propiedades.

XXV

Hierros especiales — Sus formas, dimensiones y peso.

Palastros — Fabricación de los mismos con martinetes y laminadores — Corte, aplanamiento y ondeo.

Alambres — Clase de hierro más conveniente — Calibradores — Fabricación de alambres y sus aplicaciones — Cables.

Cadenas de hierro —Su clasificación, aplicaciones y resistencia.

Colocación de máquinas — Defectos que suele tener el hierro forjado.

Trabajo del herrero — *Herramientas* — Fragua, tenazas, bigornia, martillos, estampas, mandriles, punzones y claveras — Descripción y aplicaciones de cada una.

Principales operaciones de herrería — Corte y prolongación de barras — Onión de patilla, formación de paquetes y encorvadura — Combustible y temperatura — Soldadura.

Trabajo del cerrajero — Sus herramientas — Fabricación de tornillos y tuercas — Torneadura.

XXVI

Herramientas mecánicas para trabajar el hierro en frío

GENERALIDADES

Torneadura — Tornos de puntas — Tornos al aire — Observaciones — Otras clases de tornos.

Alisadura — Su objeto — Alisadores.

Acepilladura — Clasificación y descripción de las máquinas más usadas.

Perforación — Descripción de una máquina perfeccionada.

Fabricación de tuercas y tornillos.

Escopladura, ajuste y taller de armar.

Trabajo del palastro

Generalidades — Espesor y forma de las hojas.

Trazado del contorno y marca de roblones.

Corte de las hojas — Corte con cizallas y con máquinas de acepillar y de escoplear.

Taladros — Disposición de estas máquinas y modo de operar.

Calda de hojas — Descripción del horno.

Cimbreo ó encorvadura — Cimbreo en caliente y en frío.

Fabricación de roblones — Fabricación á mano y mecánica — Máquinas de *Lemaître* y *Bergne*.

Remache, cosido ó robladura — Robladura á mano y á máquina — Máquinas de *Gouin* y de *Lemaître*.

Calafateo y retundido de juntas.

XXVII

Hierro fundido ó colado

Fusiones sucesivas — Fusión en cubilotes y en hornos reverberos.

Cazos y calderas — Dimensiones de los vasos — Su disposición y dimensiones.

Métodos de moldeo — 1.°, 2.° y 3.° — Moldeo en arena extendida y en arena verde y seca — 4.° Moldeo en arcilla — Fundición de un cilindro por este procedimiento — Disposición de la placa, construcción del *macho* ó *alma* del tubo con su reborde inferior. — Construcción de la 2.ª envoltura del molde exterior ó *chaqueta* y reborde superior — Separación de la chaqueta y ruptura de la 2.ª capa — Colocación del molde y demás operaciones — 5.° Moldeo en hierro colado — Generalidades sobre esta clase de obras.

XXVIII

Acero

Teorías y propiedades del acero — Influencia del silicio, del cromo, del tungsteno y del fósforo en la calidad del acero — Trabajos

de *Osmond* y *Werth* para explicar la acción del carbono — Modo de distinguir el acero del hierro.

Fabricación del acero según los procedimientos antiguos

Clasificación — Subdivisión de los aceros fabricados por antiguos métodos — Acero natural.

Acero de forja— Descripción del horno y marcha de las operaciones.

Acero de cementación — Descripción de los hornos — Cajas de cementación — Combustible — Carga de las cajas y marcha de las operaciones — Acero cilindrado, estirado y batido — Otro método de cementación.

Acero fundido — Descripción del horno y los crisoles — Combustible, carga y marcha de las operaciones — Preparación directa del acero fundido.

Acero damasquino — Su procedencia y propiedades — Preparación — Imitaciones.

Aceros fabricados por procedimientos modernos

Acero pudelado — Hornos — Calidad del producto.

Acero de Bessemer—Teoría del procedimiento — Momento en que deben suspenderse las reacciones — Convertidor ó conversor — Marcha de las operaciones — Disposición de las calderas — Propiedades del acero de Bessemer — Desfoforización.

Acero de Martín - Siemens — Teoría de este procedimiento y sus dificultades prácticas — Su importancia industrial — Modificación del mismo — Temple del acero — Sus aplicaciones — Aceración de herramientas.

XXIX

Cobre y su metalurgia

Propiedades — *Menas* — *Tratamiento de las menas piritosas, por vía seca* — Teoría de los procedimientos — Procedimiento inglés.

Tratamiento por vía húmeda — Calcinación, disolución, precipitación y derretido.

Cobre laminado — Aplicaciones del cobre.

Plomo y su metalurgia

Propiedades—Menas — Tratamiento de las terrosas — Tratamiento de las sulfurosas por afinidad y por reacción — Teoría del beneficio — Procedimiento español.

Desplatación de plomos — Fabricación de planchas — Su clasificación y aplicaciones.

Fabricación de tubos — Su clasificación y aplicaciones — Aleaciones del plomo y otras aplicaciones.

XXX

Zinc y su metalurgia

Propiedades — Menas — Tratamiento de la blenda.

Tratamiento de la calamina — Calcinación — Reducción.

Trabajo del zinc — Zinc fundido y laminado — Aplicaciones del zinc.

Estaño y su metalurgia

Propiedades — Menas — Preparación mecánica — Reducción— Afinación — Estaño en barras, papel de estaño y de plomo y estaño — Otras aplicaciones.

XXXI

Latón

Propiedades— Color, densidad, dureza — Su comparación con el acero — Acción del aire y modo de evitarla — Latón para torneadura.

Preparación en crisoles y reverberos.

Aplicaciones — Clasificaciones.

Metal Delta — Su preparación — Propiedades é importancia.

Bronces

Propiedades— Composición, color, dureza y textura—Acción del aire — Cómo se ablanda y endurece el bronce.

Fabricación — Bronce de campanas y cañones — Bronce para estatuas y ornamentación.

Aplicaciones — Composición de los bronces ordinarios — Bronce fosforoso — Bronce de aluminio.

XXXII

Aleación de metales sobrepuestos

Objeto de estas aleaciones — Desoxidación de las mismas.

Hoja de lata

Desoxidación de las chapas — Baño de estaño — Lavado de hojas— Clases y aplicaciones — Hoja de lata del comercio.

Hierro galvanizado

Preparación — Fusión, desoxidación, calefacción, baño, pulimento, etc.

Propiedades y aplicaciones — Causa de la destrucción del hierro por el aire húmedo — Modo de evitarla — Inconvenientes del galvanizado.

Clavazón

Generalidades — Materiales que se emplean — Condiciones del hierro dulce empleado.

Forma y dimensiones de los clavos y clavijas — Forma de las cabezas y las espigas — Alfileres ó puntas de París y tachuelas.

Forma y dimensiones de los tornillos.

Industria de metales en la República Oriental — Minas — Fundiciones de hierro y de bronce — Fábricas para trabajar el hierro.

XXXIII

Pinturas y barnices

Alquitranamiento — Sustancias colorantes — Blanco de creta — Albayalde — Blancos de Holanda, Hamburgo y Venecia — Blancos de plata y de zinc — Cal viva — Sulfatos cálcico y bárico — Negros de humo, de marfil y de composición — Tinta de China — Ocres amarillos —Amarillos de cromo, mineral y de Nápoles — Azules — Verdes — Rojos — Colores obscuros — Composición de tonos — Molienda y desleimiento — Brochas.

Pintura al óleo

Aceites secantes — Modo de aplicar la pintura — Precauciones que deben tomarse.

XXXIV

Otras clases de pinturas

Pinturas al temple, á la cerveza, al fresco y á la encáustica.

Barnices — Su clasificación y propiedades — Precauciones que deben observarse al aplicar los barnices.

Dorado galvánico, de metales, al óleo y al temple.

Bronceado — Procedimientos y aplicaciones.

Papeles pintados — Fabricación — Alisadura — Impresión — Papel aterciopelado — Dimensiones.

Cartones —Cartón ordinario — Cartón moldeado — Cartón piedra — Cartón cuero — Cartón embetunado —Telas encartonadas.

XXXV

Ensayos químicos de los materiales de construcción
Manipulaciones

Definiciones — Reactivos.

Operaciones mecánicas — División mecánica — Decantación — Filtración.

Operaciones físicas — Disolución — Evaporación, baño de arena y baño de María — Otras operaciones físicas.

Operaciones químicas — Desagregación — Precipitación — Loción — Desecación — Calcinación -- Oxidación — Reducción.

XXXVI

Ensayos cualitativos por vía húmeda

Disolventes—Cómo se averigua el disolvente que conviene á un cuerpo dado—Cómo se determina el origen de una disolución parcial—Clasificación de los cuerpos con respecto á su solubilidad ó insolubilidad.

Determinación de ácidos y bases

1.er *caso: cuerpos solubles en el agua*

Determinación de ácidos—Determinación de bases.

2.º *caso: cuerpos insolubles en el agua y solubles en los ácidos clorhídrico ó nítrico*

Determinación de ácidos—Determinación de bases.

3.er *caso: cuerpos insolubles en el agua y en los ácidos clorhídrico y nítrico*

Determinación de sulfatos y fluoruros — Determinación completa de ácidos y bases.

XXXVII

Ensayos cuantitativos

Dosificación con la balanza

Observaciones sobre el uso de la balanza—Cómo se determina el peso de los cuerpos por medio de la balanza.

Marcha de las operaciones—Separación y dosificación de los elementos de un compuesto.

Dosificación por ensayos volumétricos

Fundamento de los métodos volumétricos—Ventajas que ofrecen —Aparatos indispensables para efectuarlos.

Probetas graduadas—Descripción de las de Gay-Lussac, Mohr, Mangón, etc.

Pipetas graduadas—Sus aplicaciones, formas y modo de usarlas.

Vasijas—Su capacidad, formas y usos.

XXXVIII

Ensayo de calizas

Elementos que se determinan — Elementos insolubles en los ácidos — Sílice disuelta — Alúmina y anhidrido férrico — Cal — Magnesia — Maganeso — Sulfato cálcico — Agua y anhidrido carbónico — Determinación directa de ambas sustancias juntas — Dosificación del anhidrido carbónico — Piritas.

Métodos abreviados para el ensayo de las calizas

Ensayos ordinarios y volumétricos — Modo de verificar el ensayo.

XXXIX

Ensayos de margas

Ensayos convenientes -- Ensayo químico — Determinación de la cantidad de materias inertes.

Ensayos de cales y cementos

Dosificación de la sílice — Dosificación de la alúmina y del óxido de hierro — Dosificación de los demás elementos.

Ensayos de arcillas, ladrillos, puzolanas, etc.

Generalidades — Tratamiento por los carbonatos alcalinos — Tratamiento por el carbonato bárico — Tratamiento por el ácido fluorhídrico.

Ensayos rápidos de las puzolanas

Ensayo por medio de una disolución de potasa — Ensayo volumétrico.

XL

Ensayos de tierras vegetales

Generalidades — Separación mecánica de elementos — Ensayos de las substancias separadas — Dosificación del carbonato cálcico, del ácido sulfúrico y de las materias orgánicas.

Ensayos de hierros

Elementos que se consideran — Dosificación del carbono — Métodos de Regnault y de Berzelius — Separación del carbono mezclado y del combinado — Dosificación del silicio, del azufre, del fósforo y del hierro.

Ensayos de aguas

Generalidades — Aguas potables — Influencia del aire y del anhidrido carbónico; de las sales de calcio y las de magnesio; de los sulfatos; de los nitratos; de los cloruros, bromuros, yoduros y de los álcalis; la alúmina, el óxido ferroso y la sílice — Conclusiones.

XLI

Propiedades incrustantes de las aguas

Incrustaciones en las cañerías — Incrustaciones en las calderas.

Ensayos rápidos de las aguas

Determinación de los gases disueltos en las aguas potables — Determinación de las sustancias fijas disueltas — Aguas empleadas en la alimentación de los generadores.

Hidrotimetría

Principios y exposición del sistema — Marcha general de las operaciones.

Montevideo, Febrero 15 de 1892.

Lecciones de Procedimiento Civil

PRIMER AÑO

POR EL DOCTOR DON PABLO DE-MARÍA

Competencia de los jueces según la materia ú objeto de los juicios

Artículo 42

Serán jueces competentes para conocer del juicio de petición ó partición de herencia, del de desheredamiento y del de validez ó nulidad de disposiciones testamentarias, y en las cuestiones á que se refiere el artículo 1088 del Código Civil, los jueces del lugar donde se hubiere abierto la sucesión del difunto, con arreglo al artículo 36 del mismo Código, y según la importancia de la herencia.

Se entiende por jueces del lugar, á los efectos de este artículo y los siguientes, el Juez Departamental si lo hubiere, y el Juez Letrado de la sección jurisdiccional ó judicial á que ese lugar pertenezca.

"El *domicilio* del difunto, *siendo en territorio nacional* — dice el artículo 36 del Código Civil, — determina el lugar en que debe radicarse la testamentaría."

Para determinar, pues, cuál es el lugar donde debe radicarse la sucesión, no se atiende al territorio donde murió el causante, sino *al territorio donde tenía su domicilio.* — Así, si fallece en Treinta y Tres un vecino de Cerro-Largo, su sucesión se radicará en Cerro-Largo y no en Treinta y Tres.

El artículo que comentamos concuerda en su mayor parte con la legislación italiana (artículos 94 del Código de Procedimiento y 923 del Código Civil), con la francesa (artículos 59 del Código de Procedimiento y 110 del Código Civil) y con la española (artículo 63, incisos 5.°, 6.° y 7.° de la Ley de Enjuiciamiento Civil de 1881).

Según el mismo artículo que comentamos, los jueces del domicilio del difunto, ó sea del lugar donde legalmente está radicada la sucesión, son competentes para conocer:

1.° Del juicio de petición ó partición de herencia.

2.° De las cuestiones sobre desheredación.

3.° De las cuestiones sobre validez ó nulidad de disposiciones testamentarias.

4.° De las cuestiones á que se refiere el art. 1088 del Código Civil, ó sea de las cuestiones sobre *propiedad* de objetos que alguien alegue que le pertenecen exclusivamente y que, en consecuencia, no deben entrar en la masa partible.

En todos estos asuntos (salvo el no contencioso de simple partición de herencia) debe tenerse en cuenta la *importancia pecuniaria* de los mismos, según lo expresa el artículo de que nos ocupamos. — Así, si se trata de una demanda de petición de herencia, relativa á bienes dejados por un vecino de Montevideo, no será competente para conocer de ella el Juez L. Departamental de Montevideo, *en el caso de que los bienes valgan más de dos mil pesos;* el juez competente será en tal caso el de lo Civil (artículos 93 y 97 del C. de P.) — Tratándose de simple partición de herencia, podrá entender el Juez L. Departamental de Montevideo, aun cuando el asunto sea de más de dos mil pesos, *siempre que no se suscite controversia* (art. 43).

Si el objeto en que *un tercero* alega un derecho *de dominio* exclusivo, es un inmueble poseído por una testamentaría, ¿dónde deberá ese tercero entablar su demanda? ¿ante el juez de la testamentaría ó ante el del lugar donde está situado el inmueble?

El artículo 1088 del Código Civil dice que "las cuestiones so- "bre *la propiedad* de objetos en que alguien alegue un derecho "exclusivo y que, en consecuencia, no deban entrar en la masa "partible, serán decididas por *el juez competente.*" — Pero, ¿cuál es el juez competente? — El Código Civil no lo dice. Luego, puede entenderse que se ha atenido á las reglas generales de la competencia, y según esas reglas, el juez competente para

conocer de acciones reales sobre bienes inmuebles *es el del lugar en que están situados los mismos inmuebles* (art. 28 del C. de P.).

El Código de Procedimiento ha copiado en su artículo 1121 el texto del artículo 1088 del Código Civil, pero con una variación: en vez de decir "el juez competente", como lo hace el referido artículo del Código Civil, dice "el juez de la causa;" — expresión, que parece referirse al juez que conoce del juicio testamentario.

En fin, el artículo 42, que comentamos, aclara esto, puesto que establece terminantemente que serán jueces competentes *para conocer de las cuestiones á que se refiere el artículo 1088 del Código Civil*, los del lugar donde se hubiere abierto la testamentaría, con arreglo al artículo 36 del mismo Código Civil, es decir, los jueces del último domicilio del difunto.

Si el artículo 1088 del Código Civil (copiado del 1331 del Código Chileno) al hablar de "las cuestiones sobre la propiedad " de *objetos* en que *alguien* alegue un derecho exclusivo," comprende en la palabra "objetos," tanto los muebles como los inmuebles, y en la palabra "alguien," no sólo á los herederos y legatarios, sino también á los terceros; — en otros términos, si con arreglo al principio de que donde la ley no distingue, á nadie le es dado distinguir, el citado artículo del Código Civil se refiere, no sólo al caso de ser un interesado en la testamentaría el que alega que tal ó cual bien le pertenece á él exclusivamente y no debe entrar en la masa partible, sino también al caso de que sea un tercero el que reivindique un bien poseído por la testamentaría, hay que entender, de conformidad con el artículo 42 del C. de P. C., que ese tercero reivindicante debe entablar el juicio en el lugar donde está radicada legalmente la testamentaría, aun cuando no sea el de la situación de la cosa.

Resultando esto de la combinación del artículo 42 del Código de Procedimiento con el 1088 del Código Civil, nos parece que el legislador no ha sido perfectamente lógico ni consecuente con sus propios principios. — En efecto, ¿qué importa que el poseedor del inmueble litigioso esté vivo ó haya muerto? — ¿Qué importa que por una ficción de la ley el difunto continúe viviendo en la persona de su sucesión, de manera que ésta siga teniendo el mismo domicilio del difunto? — Cuando se trata de acción real sobre bienes raíces, el domicilio y la persona del demandado son *indiferentes;* la competencia se determina *por la situación de la cosa*, y en consecuencia, todo juicio de reivindicación de un in-

mueble debería siempre seguirse ante el juez del lugar donde está situado el inmueble, aun cuando la parte demandada fuese una sucesión.

Así lo establece el Código Italiano, cuyas disposiciones funda Mattirolo en los siguientes términos: — "Las acciones *reales inmuebles* de los acreedores de la herencia, á diferencia de las de los legatarios, no están sujetas á la competencia especial del *forum apertæ successionis;* deben ser entabladas ante la autoridad judicial que sea competente según los principios generales. — La razón de esta diferencia ha sido bien explicada por Pisanelli. — El derecho de los legatarios — observa dicho autor, — surge del hecho mismo de la sucesión; por consiguiente, bien ha podido la ley extender las reglas que gobiernan la competencia en materia de sucesión, á *todas* las acciones de los legatarios. — Al contrario, el derecho de los acreedores es independiente de la apertura de la sucesión, y por esto, si bien tratándose de las acciones *personales* y de las *muebles,* puede la ley, por consideraciones de conveniencia, hacer que continúe por algún tiempo el domicilio del difunto en el lugar de la apertura de la sucesión, tratándose de las acciones *reales inmuebles* promovidas por terceros, no median los mismos motivos; — de manera que estas acciones siguen el *forum rei sitæ,* con arreglo á los principios generales de competencia." (Tomo 1.°, núm. 615.)

Rogrón, en sus notas al artículo 59 del Código Francés de Procedimiento Civil, transcribe un fallo de la Corte de Tolosa que establece con sólidos fundamentos la misma doctrina enunciada en el párrafo de Mattirolo que dejamos citado. — Dalloz, concordando con ella, dice: — "Una sucesión, cuando es *actora,* debe demandar al reo ante el juez del domicilio de este mismo, ó ante el juez del lugar de la situación de la cosa litigiosa, según la naturaleza de la acción de que se trate. — Si, al contrario, la sucesión es *demandada,* es ante el juez del lugar donde se ha abierto, que debe ser citada, *salvo que se trate de una acción real* ó mixta, en cuyo caso debe ó puede serlo ante el juez del lugar donde está situado el inmueble en litigio." (Compétence civile des Tribunaux d'Arrondissement et des Cours d'Appel, núm. 62.) — Lo mismo enseña Boitard (sobre el art. 59).

Caravantes (tomo 1.°, núm. 329) sostiene la doctrina contraria, aduciendo, entre otros argumentos, el de que "en materia de su- " cesiones no puede aplicarse la regla que señala como fuero com-

" petente para las acciones reales el lugar en que está sita la
" cosa que se demanda, porque siendo el patrimonio, considerado
" como unidad, un objeto ideal de un contenido indeterminado,
" como dice Savigny, no puede reputarse como una cosa inmue-
" ble para señalar como fuero competente el lugar en que se
" halla sita. "—Este argumento no nos parece atendible, porque la *ficción* de la unidad ideal del patrimonio podrá producir todos los efectos que se quieran, menos el de destruir la realidad tangible é invariable de que un *inmueble* está situado en donde realmente lo está.—La situación del inmueble es siempre la misma, sea quien fuere su poseedor, tanto estando vivo éste, como habiendo muerto y dejado tantos ó cuantos herederos domiciliados en diversos lugares; y desde que en materia de acciones *reales sobre inmuebles* el verdadero principio para determinar la competencia es el *forum rei sitæ,* nos parece lógico que no deba variarse por el hecho *indiferente* de que la parte demandada sea una sucesión.

Indudablemente, en el juicio sucesorio debe haber *unidad,* á fin de que no se divida la continencia de la causa, pero esa unidad sólo puede referirse á las gestiones que son una *incidencia* ó una *dependencia* del mismo juicio sucesorio y que forman reunidas el todo que lo constituye.—Es natural, pues, que los herederos y legatarios deduzcan sus derechos *dentro* y no *fuera* del juicio sucesorio en que tienen interés; es natural igualmente que los terceros que tienen acciones *personales* de cualquiera clase ó *reales sobre muebles,* contra la sucesión, las deduzcan *dentro* y no *fuera* del juicio sucesorio, desde que esas acciones tienen relación con el fuero *del domicilio del demandado;* pero no es natural que los terceros que deducen contra la sucesión acciones *reales sobre inmuebles* sean obligados á litigar en el lugar y ante el juez del domicilio de la misma sucesión, puesto que las referidos acciones siguen el fuero de la situación de la cosa y no el del domicilio (art. 28 del C. de P. C.)

Siendo el dominio una calidad *inherente á la cosa,* un vínculo real que la liga al dueño (art. 441 del Código Civil); siendo la acción real aquella por la cual se persigue *la cosa, con independencia de la persona* (art. 241 del C. de Procedimiento), lo lógico es que siempre el que ejercita una acción real sobre un inmueble, ó sea sobre una cosa cuya situación es invariable, vaya á entablar dicha acción allí donde se halla el mismo inmueble.

Como síntesis de lo expuesto, diremos: 1.º que consideramos que según el texto del artículo 1088 del Código Civil, combinado con el del artículo 42 del Código de Procedimiento, las acciones *de dominio* entabladas por terceros contra una testamentaría, deben seguirse ante el juez del lugar donde está radicado el juicio testamentario, *mientras dicho juicio se halle pendiente;* 2.º que nos parece que esto no es arreglado á los verdaderos principios del derecho procesal.

Decimos " mientras el juicio testamentario esté pendiente," porque, después de concluído por la partición, no podrá haber duda de que el heredero demandado deberá serlo en su propio domicilio, ó en el lugar de la situación de la cosa, según corresponda con sujeción á las reglas generales de la competencia. — Hecha la partición, la entidad llamada "sucesión" desaparece, considerándose que cada heredero " ha sucedido inmediata y exclusivamente al " difunto en todas las cosas que le hubieren cabido, y no ha tenido " jamás parte alguna en las otras cosas de la sucesión." (Artículo 1113 del Código Civil.)

El Código de Procedimiento Civil prevé dos casos distintos de juicios sucesorios: 1.º el de herencia *testada,* ó intestada *no yacente;* 2.º el de herencia *yacente.* — El juicio de herencia yacente, llamado también, con poca propiedad, de *ab-intestato* [1], tiene lugar cuando el finado no ha dejado testamento ni descendientes, ascendientes ó parientes colaterales dentro del décimo grado; ó cuando, habiendo dejado herederos, éstos han repudiado la herencia, y no hay albacea con tenencia de bienes que haya aceptado el cargo (artículos 1123 y 1126).

Tratándose de herencia *yacente,* rige, en cuanto á la competencia, la disposición expresa contenida en el artículo 1144, que dice: "El juez del ab-intestato será el único competente para " conocer de las demandas que se deduzcan contra los bienes del " difunto después de promovido el juicio, y de las que hubiere " pendientes al fallecimiento del intestado."

---

1. *Ab-intestato* quiere decir «sin testamento,» y por consiguiente, debería llamarse juicio de ab-intestato á todo juicio de sucesión *no testamentaria.*

Si un tercero entabla acción *posesoria* contra una sucesión indivisa no yacente, ¿dónde deberá seguirse el juicio?

Este punto, tratado por Caravantes (tomo 3.°, páginas 237 y 238) y por Manresa, Miquel y Reus (tomo 3.°, páginas 587 y 588) merece un detenido estudio con arreglo á nuestra legislación, pero nos limitamos á indicarlo porque su completa dilucidación no es compatible con los estrechos límites de estas lecciones, y además porque los juicios posesorios son materia que no corresponde al curso de primer año de Procedimientos Judiciales.

Cuando la sucesión es la *actora,* no hay lugar á discusión ni duda en caso alguno: — la competencia debe ser determinada siempre según las reglas generales. — Si se trata, por ejemplo, de acción *personal,* será la sucesión demandante la que deberá ir al domicilio del demandado, y no el demandado el que deberá ir al domicilio de la sucesión. (Conformes, Caravantes, tomo 3.°, número 734; Manresa, Miquel y Reus, tomo 3.°, página 75; Dalloz, "Compétence civile des Tribunaux d'Arrondissement," núm. 62.)

¿Cómo debe entenderse el inciso 2.° del artículo que comentamos?

Si se trata de una sucesión radicada en Montevideo, no hay dificultad; en Montevideo existen dos jueces del lugar: el Departamental y el de lo Civil. — Pero, si la sucesión está radicada en campaña, no resulta completamente claro el referido inciso. — La campaña no está dividida en secciones jurisdiccionales distintas de los Departamentos, como lo estaba antes de la promulgación del Código de Procedimiento, ó sea cuando había dos Jueces de lo Civil, uno de la primera sección (Montevideo y Canelones) y otro de la segunda (el resto de la República).

El artículo 97 dice que los Jueces L. de lo Civil conocerán en primera instancia de todas las causas civiles *del Departamento de la Capital,* pero al hablar de "las causas mencionadas en los artículos "43 y 44," no dice lo mismo. — Puede, pues, entenderse, atenién-

dose á la letra del referido artículo 97, que los Jueces L. de lo Civil son competentes para conocer de las causas á que se refieren los artículos 43 y 44, aun cuando esas causas no pertenezcan al Departamento de la Capital.

De este modo resulta que los jueces *del lugar,* á que se refiere el artículo 42, son el del Departamento respectivo y el de lo Civil que esté de turno. — Los jueces que son competentes en los casos del artículo 43, lo son también en los del artículo 42, según resulta del texto del artículo 43.

Entendemos que la práctica está de acuerdo con esta interpretación.

En los casos á que se refiere el artículo de que nos ocupamos, són competentes dos jueces á la vez. — Hay que aplicar, pues, lo que hemos dicho anteriormente al ocuparnos de la jurisdicción *acumulativa.*

Así, si se trata de una herencia de diez mil pesos dejada por un vecino de Canelones, serán jueces competentes para conocer de los asuntos á que se refiere el artículo 42, relativos á ella, el Departamental de Canelones y el de lo Civil; — debiendo entender en esos asuntos el que *prevenga* en el conocimiento de ellos.

Artículo 43

Cualquiera de los jueces á que se refiere el artículo anterior será competente para entender á prevención de todas las diligencias judiciales relativas á la apertura de la sucesión, colocación de sellos, formación de inventarios, tasación y división de los bienes que el difunto hubiese dejado, y de la manifestación de que trata el artículo 1041 del Código Civil, cualquiera que sea su importancia, y mientras no se suscite controversia.

Les compete, también la apertura y publicación del testamento cerrado, y el reconocimiento y publicación del testamento menos solemne.

Con arreglo á lo que hemos dicho en el precedente comentario, son jueces competentes para entender en todas las gestiones deta-

lladas en este artículo, el Departamental y el de lo Civil. — El interesado que promueve la gestión puede dirigirse á cualquiera de esos dos jueces. Previniendo uno de éstos en el conocimiento del asunto, la jurisdicción queda radicada en él, según lo hemos explicado anteriormente al hablar de la "jurisdicción acumulativa."

Si se suscita controversia, hay que atender á *la cantidad* para determinar la competencia. — Así, si un juicio sobre inventario, avalúo y partición de bienes hereditarios que valen más de *dos mil pesos*, se hace contencioso, no será competente para conocer de él el Juez L. Departamental de Montevideo (art. 93).— En tal caso, el juez competente será el de lo Civil.

Si se trata de un Juez L. Departamental de campaña, el hecho de que se suscite controversia y de que los bienes tengan tal ó cual importancia, es indiferente, puesto que todos los Jueces L. Departamentales, con excepción del de Montevideo, tienen jurisdicción *ilimitada en cuanto á la cantidad,* desde el máximum fijado á los Jueces de Paz, en adelante (art. 95).

El art. 1041 del Código Civil á que se refiere el que comentamos, dice: " El que quiere tomar la calidad de heredero á bene-
" ficio de inventario, debe manifestarlo por escrito *ante el Juzgado*
" *Ordinario* del lugar en que se verificó la sucesión."

Las palabras " ante el Juzgado Ordinario," deben considerarse sustituídas por estas otras: ante cualquiera de los dos jueces que indica el art. 42 del Código de Procedimiento.

Artículo 44

Lo mismo sucederá respecto del nombramiento de tutor ó curador, sus incapacidades ó excusas y remociones, discernimiento del cargo y discusión de todo lo relativo á éste, aunque los bienes estén fuera del lugar que abrace su jurisdicción.

La actual Ley Española de Enjuiciamiento Civil establece en su artículo 63, lo siguiente:

" En el nombramiento y discernimiento de los cargos de tutores
" ó curadores para los bienes y excusas de estos cargos, será juez
" competente el del domicilio del padre ó de la madre cuya muerte
" ocasionare el nombramiento, y en su defecto, el del domicilio
" del menor ó incapacitado, ó el de cualquier lugar en que tuviese
" bienes inmuebles." (Inciso 17.)

" En las demandas en que se ejercitaren acciones relativas á " la gestión de la tutela ó curaduría, en las excusas de estos car- " gos *después de haber empezado á ejercerlos*, y en las demandas " de remoción de los guardadores como sospechosos, será juez " competente el del lugar en que se hubiere administrado la guar- " daduría en su parte principal, ó el del domicilio del menor. " (Inciso 19.)

Como se ve, la Ley Española hace diferencia entre las diligencias *que preceden* á la administración de la tutela ó curatela, y las cuestiones relativas al ejercicio de esa administración después de haber entrado en él el tutor ó curador.—Respecto de las primeras, da una regla para determinar la competencia, y respecto de las segundas, da otra regla distinta.

Nuestro Código ha querido hacer lo mismo en sus artículos 44 y 45, pero ha incurrido en cierta involucración, puesto que, según los términos del artículo 44, somete á una misma regla de competencia tanto las gestiones judiciales *anteriores* al ejercicio de la administración (ó sea las relativas al nombramiento de los tutores ó curadores, sus incapacidades y excusas), como las de *remoción*, que presuponen aquel ejercicio. — Remover á un tutor ó curador es separarlo del cargo después de haber entrado á ejercerlo.

Hay que armonizar el artículo 44 con el 45, y á nuestro juicio puede hacerse esto del modo siguiente: — Si se trata de remover al tutor ó curador *por incapacidad sobreviniente* (art. 311, inciso 1.º, Código Civil), ó sea por motivos que directamente se refieren á la persona y no á la administración, deberá aplicarse solamente la regla del artículo 44, para determinar la competencia. — Si se trata de discutir la administración en sí misma, como sucede cuando se ataca al tutor ó curador como infiel ó sospechoso (art. citado del Código Civil, incisos 2.º y 3.º), entonces habrá que aplicar la regla del artículo 45, puesto que éste se refiere á " los juicios en que se ejerciten acciones respecto *á la gestión* de " los guardadores y administradores. "

De las palabras "lo mismo sucederá," que emplea el art. 44, se desprende que para conocer de las gestiones á que se refiere serán jueces competentes los que indica el art. 42, es decir, el Departamental y el de lo Civil. — Pero, ¿cuál Juez Departamental? — ¿El del Departamento donde existan los bienes del menor ó incapaz? — Es indudable que no, puesto que las palabras finales del artículo 44 dan á entender claramente que en esta materia no

se atiende á la situación de los bienes para determinar la competencia.—Debe atenderse, pues, al *domicilio,* como en el caso del art. 42, y en consecuencia, nos parece que el Juez Departamental competente será el del domicilio del padre ó de la madre cuya muerte ocasione el nombramiento de tutor ó curador, ó el del domicilio del menor ó incapacitado, como lo establece la Ley Española.

Artículo 45

De los juicios en que se ejerciten acciones respecto á la gestión de los guardadores y administradores, conocerán los jueces del lugar en que se hubiese desempeñado la tutela ó la administración, á no ser que se prefiera el fuero del domicilio del tutor ó administrador, pero atendida la importancia de los bienes.

Según este artículo, el actor puede, á su elección, entablar la demanda en el lugar donde se ha desempeñado la tutela ó la administración, ó en el domicilio del tutor ó administrador.

Reina la mayor anarquía entre las legislaciones extranjeras respecto de la determinación de la competencia en el caso de que se trata.—Así, el Código Francés (art. 527) y la ley Belga (art. 45) establecen que las gestiones sobre la administración de los tutores se entablarán ante el juez *del lugar donde fué discernida la tutela;*—el Código Italiano dispone que dichas gestiones podrán ser entabladas, tanto en *el lugar en que fué discernida la tutela ó administración,* como en el lugar en que ha sido *ejercida* (art. 97); el Código Alemán (§ 31) atribuye la competencia solamente al juez del lugar donde la administración ha sido *ejercida;* la ley Chilena (art. 222) declara competente al juez *del domicilio del pupilo;* y en fin, la actual ley Española (art. 63, inciso 19) establece que el juez competente será el del lugar *en que se hubiere administrado* la guardaduría en su parte principal, ó el del domicilio *del menor.*

La disposición de nuestro Código nos parece la más lógica y acertada.

Es natural suponer que en el lugar donde se ha desempeñado la administración haya, en la generalidad de los casos, más facilidad que en cualquier otro para reunir y presentar sin demora

los elementos necesarios para la resolución de la controversia. — Está, pues, perfectamente justificada la disposición del artículo que comentamos, en cuanto permite que, tratándose de acciones sobre la gestión de guardadores y administradores, se siga el *forum gestæ administrationis.* — Pero, las referidas acciones son *personales,* y por consiguiente, lógico es que también puedan ser entabladas en el *forum domicilii,* ó sea ante el juez *del domicilio del tutor ó administrador.*

El artículo de que tratamos ¿será aplicable en todos los casos de acciones relativas á la gestión de administradores, aun cuando éstos sean simples *mandatarios* privada y voluntariamente constituídos? — Mattirolo se hace cargo de esta cuestión, resolviéndola en sentido negativo. — "La Corte de Apelaciones de Turín (dice), " en sentencia de 19 de Noviembre de 1880, ha declarado que las " administraciones á que se refiere el art. 97 del Código Italiano " de Procedimiento Civil [1] son únicamente aquellas que *tienen " una semejanza, una especie de afinidad con la tutela y con la " administración tutelar,* es decir, las administraciones por cuenta " de personas ó entidades incapaces de administrar directamente " por sí mismas; no las administraciones que unas personas pri- " vadas confían, por propia comodidad, á otras, y que dependen " únicamente de un simple mandato voluntario.—No puede dudarse " (agrega la Corte), de que es éste el sentido de la disposición " legal citada, desde que ésta habla por igual de *la tutela y la " administración,* demostrando de este modo que se refiere á dos " hechos de la misma naturaleza, merecedores de un mismo tra- " tamiento; y sería absurdo que una administración cualquiera " ejercida por una persona privada por mandato de otra persona " privada, viniese á ser igualada á una tutela, así como sería exor- " bitante, irracional y absurdo que cualquier mandatario de- " biese ser llamado á rendir cuentas del negocio administrado por " él, ó sea de la ejecución de su mandato, ante el juez del lugar " donde el mismo mandato ha sido ejercido." (Tomo 1.º, núm. 625.)

Caravantes, comentando el artículo 5.º, inciso 5.º, de la Ley Española de 1855 [2], dice: " Esta disposición se halla conforme con

1. El citado artículo del Código Italiano, dice: —«La acción por rendición de cuentas de una tutela ó de una administración se entabla ante la autoridad judicial del lugar en que la tutela ó la administración ha sido conferida ó ejercida.»

2. El referido inciso del art. 5.º de la Ley de Enjuiciamiento Civil de 1855, dice: «El juez competente para conocer de los pleitos en que se ejerciten acciones respecto á la gestión de los guardadores, el del lugar en que se hubiere administrado lo principal, y en todo caso el del domicilio del guardador, si tuviere el mismo del menor.»

“ la Ley 32, Tít. 2, Partida 3.ª, que señala como juez com-
“ petente para entablar las acciones sobre cuentas de administra-
“ ciones públicas ó de particulares, de tutela ó curatela, y demás
“ obligaciones provenientes de éstos y otros cargos *semejantes* por
“ razón de los mismos, el del lugar donde se desempeñaron aqué-
“ llos. Aunque la Ley de Enjuiciamiento sólo menciona á los
“ guardadores, debe entenderse como refiriéndose también á las
“ demás personas que tienen establecido un lugar para la admi-
“ nistración de los negocios propios ó ajenos, y que constituye
“ lo que se ha llamado *forum gestæ administrationis*, puesto que
“ militan, respecto de dichas personas, las mismas razones y fun-
“ damentos que acerca de los guardadores. ” (Tomo 1.º, núms. 343 y siguientes.)—Manresa, Miquel y Reus establecen, más ó menos, lo mismo. (Tomo 1.º, págs. 29 y 30.)

Por nuestra parte, creemos, con arreglo á la doctrina de la Corte de Turín, que el artículo de que tratamos no es aplicable á todas las clases posibles de *administraciones*, sino solamente á aquellas que tienen similitud con la tutela y están, así, en el caso de que se les aplique el principio de que “donde hay la misma “ razón, debe haber la misma disposición de derecho.” *(Ubi eadem est ratio, eadem est juris dispositio.)*— El padre administra los bienes de los hijos sujetos á su patria-potestad; su administración tiene semejanza con la de la tutela, y por consiguiente, los juicios en que se ejerciten acciones sobre la gestión del padre en su carácter de *administrador* legal, caerán bajo el imperio del artículo que comentamos, en cuanto á la determinación del juez competente para conocer de ellos. (Conformes: Borsari, comentario al art. 97 del Código Italiano, y Mattirolo, tomo 1.º, núm. 626.)

Por lo demás, siempre que se trate de casos en que sea dudosa la aplicabilidad del artículo que comentamos, deberá, como lo indica el último de los autores citados, prevalecer la competencia *ordinaria* del *forum domicilii*, y no la *especial* del *forum gestæ administrationis.*

Artículo 46

El administrador judicial deberá responder ante el juez que le haya conferido la administración

Las gestiones tendentes á que el administrador judicial rinda cuenta ó responda de sus actos, son *incidencias* del juicio en que ha sido nombrado el mismo administrador. — Es natural, pues, que dichas gestiones no se sigan ante otro Juzgado, sino precisamente ante aquel que conoce de los autos en que se hizo el nombramiento.

Si por estar embargado ó ser litigioso un establecimiento situado en Tacuarembó, se nombra un administrador judicial de él, por decreto del Juez de Montevideo que conoce de la causa, dicho administrador judicial no podrá pretender que las gestiones que contra él se promuevan relativamente á su administración, sean seguidas en su domicilio, ó sea en Tacuarembó; tendrá que responder á ellas en Montevideo, ante el juez que le confirió la administración.

Refiriéndose á la Ley Española de Enjuiciamiento Civil de 1855, dicen Manresa, Miquel y Reus: "Téngase presente que los administradores judiciales deben responder de sus gestiones ante el mismo juez que los nombró y en los mismos autos de donde procede su nombramiento, como se deduce de los artículos 386, 502, 548 y siguientes." (Tomo 1.°, pág. 30.)

Artículo 47

Los que hubiesen sido citados en garantía de cualquier especie, con motivo de un litigio, serán obligados á comparecer delante de los Jueces ó Tribunales donde penda la demanda principal.

Lo mismo sucederá si el vendedor citado de evicción saliere al pleito.

Concuerda con el Código Italiano (artículo 100, inciso 1.°), con el Código Francés (artículos 59 y 181) y con la Ley Española de 1881 (artículo 63, inciso 3.°).

Se quebrantaría *la continencia de la causa,* ó sea la unidad que

debe haber en el pleito, y se violaría el principio de que lo accesorio sigue á lo principal, si el citado en garantía con motivo de un litigio, no debiese comparecer ante el juez que conoce de lo principal del mismo litigio.

Si en un pleito entablado, por ejemplo, contra un vecino de Montevideo, como principal obligado, hay que citar y se cita al fiador de éste, dicho fiador, aun cuando sea vecino de otra parte, tendrá que comparecer ante el juez que conoce del pleito en Montevideo. (Conforme, Mattirolo, tomo 1.°, núm. 758.)

Del mismo modo, si en un juicio de reivindicación, el demandado hace citar de evicción y saneamiento á la persona que le vendió la cosa que se le disputa, esa persona, para poder tomar la voz del pleito, tendrá que comparecer ante el juez y en los autos del mismo pleito. — Véase sobre el particular lo dispuesto por los artículos 314 y siguientes del Código de Procedimiento Civil.

Facultad de Matemáticas Superiores

PROGRAMA

DE CÁLCULO DIFERENCIAL É INTEGRAL

PRIMERA PARTE

Cálculo Diferencial

Nociones preliminares — Variable — Función — Constante — Límite — Infinitamente pequeño — Diferencias — Diferenciales — Funciones derivadas.

Principios de diferenciación — Interpretación geométrica de las derivadas — Objeto del Cálculo Diferencial — *Derivadas y diferenciales de las funciones fundamentales* — Derivada y diferencial de la función $y = x^m$ — Derivada y diferencial de la función $y = log\ x$ — Derivada y diferencial de la función $y = sen\ x$.

Derivadas y diferenciales de primer orden — *Derivadas y diferenciales de las funciones explícitas* — Derivada y diferencial de la suma ó de la diferencia de dos funciones — Derivada y diferencial del producto de varias funciones — Derivada y diferencial de un cociente ó de una fracción — Derivada y diferencial de una función de funciones — Derivadas y diferenciales de las funciones exponenciales — Derivadas y diferenciales de las funciones circulares — Derivada y diferencial de una función de muchas variables — Derivada y diferencial de una función compuesta — *Derivadas y diferenciales de las funciones implícitas* — *Derivadas y diferenciales de algunas funciones particulares* — *Aplicaciones de los principios de diferenciación.*

Derivadas y diferenciales de órdenes superiores al primero — Derivadas y diferenciales sucesivas de las funciones explícitas — Diferenciales sucesivas de las funciones de una variable — Diferenciales sucesivas de las funciones de muchas variables — Diferenciales sucesivas de las funciones compuestas — *Derivadas y diferenciales sucesivas de las funciones implícitas.*

Aplicaciones analíticas — Verdadero valor de las expresiones que toman una de las formas: $\frac{0}{0}$ $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$, 0^0, 0^∞, ∞^0, 1^∞—*Desarrollo de las funciones en series* — Desarrollo de las funciones algébricas enteras, de una sola variable. — Desarrollo de funciones cualesquiera, de una sola variable — Serie de Taylor — Serie de Maclaurin — Desarrollo de las funciones de dos variables — *Aplicaciones de los desarrollos de las funciones en series* — Desarrollo de las funciones exponenciales — Desarrollo de e^{-x} y de e^x — Desarrollo de *sen x* y de *cos x.* — Desarrollo de *log.'* $(1+x)$ y de *log.'* $(1-x)$ — Desarrollo de $(1+x)^m$ *y de* $(1-x)^m$ — Fórmula de Moivre — *Máximos y mínimos de las funciones* — Máximo y mínimo de las funciones de una variable — Máximos y mínimos de las funciones de dos variables.

Aplicaciones geométricas—Tangentes y normales á las curvas planas — Tangentes: á la circunferencia, á la elipse, á la hipérbola y á la parábola — Subtangente — Normal — Subnormal — *Concavidad y convexidad de las líneas planas* — Puntos de inflexión — Aplicación — *Curvatura de las líneas planas* — Determinación del radio de curvatura — Diferentes órdenes de contacto — Curva osculatriz — Círculo osculador — *Curvas envolventes — Evolutas de las curvas planas — Puntos singulares de las curvas planas* — Puntos: múltiples, de retroceso, de detención angulosos, conjugados — *Curvas de doble curvatura* — Expresión de un elemento de curva — Tangente — Planos: normal, tangentes, osculador — Normal principal — Radio de curvatura — Segunda curvatura — *Superficies curvas* — Plano tangente, normal — *Superficies envolventes — Curvatura de las superficies — Teorema de Meunier* — Indicatriz — Teorema de Euler — Líneas de curvatura — *Caracteres analíticos de las principales familias de superficies* — Superficies: cilíndricas, cónicas, de revolución, etc.

SEGUNDA PARTE

Cálculo Integral

Nociones preliminares — Objeto del Cálculo Integral —Interpretación geométrica y notación de una integral — Teorema fundamental del Cálculo Integral.

Principios de integración — Integral de una suma algébrica de diferenciales — Procedimientos de integración.

Integración de las diferenciales ordinarias — *Integración de las funciones racionales* — Diferenciales algébricas enteras — Diferenciales algébricas fraccionarias — *Integración de las funciones irracionales* — *Integración de las funciones binomias* — *Integración de las diferenciales logarítmicas y exponenciales* — *Integración de las diferenciales de las funciones circulares* — *Integración por desarrollo en serie*— *Cálculo aproximado de las integrales definidas* — Fórmula de Tomás Simpson.

Aplicaciones del Cálculo Integral — *Rectificación de las curvas* — Rectificación de las curvas planas — Rectificación de la elipse, de la parábola, de la catenaria — Rectificación de las curvas de doble curvatura — Rectificación de la hélice—Rectificación de las curvas dadas en coordenadas polares — Rectificación de la espiral logarítmica — *Cuadratura de las curvas* — *Area de las curvas planas* — Superficie de los triángulos, del trapecio, del círculo — Areas de la elipse, de la hipérbola, de la parábola, de la sinusoide, de la cicloide—Areas de las curvas dadas en coordenadas polares—Areas de la espiral de Arquímedes — *Area de las superficies curvas* — Area de las superficies de revolución — Area de la esfera, del elipsoide de revolución, del paraboloide de revolución — Area de una superficie helizoidal — *Cuadratura de las áreas curvas cualesquiera* — *Curvatura de los sólidos terminados por superficies curvas* —Volúmenes terminados por superficies de revolución—Volumen del elipsoide de revolución, del paraboloide de revolución—Volumen del elipsoide de tres ejes desiguales — Volúmenes de otros cuerpos terminados por superficies curvas — Cálculo de los volúmenes por aproximación.

De las ecuaciones diferenciales de más de una variable — *Integración de las diferenciales ordinarias* — Ecuaciones diferenciales del primer

orden y del primer grado — Ecuaciones diferenciales homogéneas — Ecuaciones diferenciales lineales — Determinación gráfica de las integrales — Ecuaciones del primer orden cuyo grado es superior al primero — Soluciones singulares — Ecuaciones diferenciales del segundo orden — Ecuaciones diferenciales lineales — *Integración de las ecuaciones diferenciales simultáneas* — Diferenciales simultáneas del primer orden entre tres y cuatro variables — *Integración de las diferenciales totales* — Diferenciales del primer orden con dos y tres variables — *Integración de las ecuaciones de diferencias parciales* — Ecuaciones de diferencias parciales del primero y del segundo orden — *Aplicaciones geométricas.*

Montevideo 1.° de Febrero de 1892.

JUAN MONTEVERDE.

RESOLUCIÓN DEL CONSEJO

Aprobado.

Montevideo, Junio 3 de 1892.

VÁSQUEZ ACEVEDO.

Curso de Cosmografía

POR NICOLÁS N. PIAGGIO

(Continuación)

5.ª Demostración de la rotación de la Tierra. — "Examinando la cuestión desde el punto de vista mecánico, dice Delaunay (1), se encuentra que es la Tierra, y no el cielo estrellado, que posee un movimiento de rotación al rededor de la línea de los polos.

Si el movimiento diurno fuese debido á las estrellas, cada una de ellas E, E', E'' (Fig. 23) describiría uniformemente un círculo

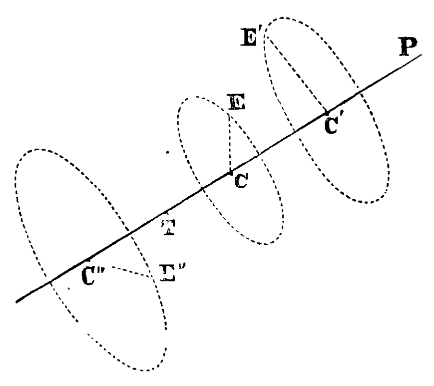


Figura 23.

situado en un plano perpendicular á la línea de los polos PT; y los centros de estos círculos estarían situados en los pies C, C', C'', de las perpendiculares bajadas desde las estrellas sobre esta línea, siendo estas perpendiculares inmensamente grandes. Pero se sabe

(1) "Cours Elementaire d'Astronomie".

que para que un cuerpo describa un círculo con movimiento uniforme, es necesario que ese cuerpo sea atraído hacia el centro del círculo por una fuerza constante, cuya intensidad depende simultáneamente de la velocidad del cuerpo y del radio del círculo que describe; las estrellas E, E' E'' no podrían entonces moverse en las circunferencias de que hablamos, sino á condición de ser atraídas por fuerzas situadas en los puntos C, C' C,'' situados sobre la línea de los polos. Ahora, no hay ejemplo en la naturaleza de que una fuerza aplicada á un cuerpo, según una cierta dirección, no emane de otro cuerpo situado sobre esta misma dirección: una estrella E no sería atraída por el punto C, si en C no existiese un cuerpo inmóvil cuya presencia determinaría esa misma atracción.

Así, para que se pueda admitir que las estrellas giran realmente al rededor de la línea de los polos, sería necesario que cuerpos fijos estuviesen distribuídos á lo largo de esa línea en los puntos C, C' C'', y tantos como estrellas hay. La observación no indica nada de esto en el cielo, y de aquí deducimos fácilmente el movimiento de rotación de la Tierra.''

32. ¿Qué sucedería si la Tierra se detuviera bruscamente en su movimiento? — Con el fin de que sean más generales nuestras conclusiones, vamos á considerar los dos movimientos principales de la Tierra, el de rotación ya demostrado y el de traslación que después probaremos.

Cuando se conoce la velocidad del movimiento de un cuerpo y su masa, se puede calcular con toda precisión la cantidad de calor que se obtendría deteniéndose el cuerpo, ó sea, la cantidad de calor que encerraba el movimiento y que se manifiesta acumulada en la destrucción brusca de ese movimiento.

Helmoltz ha hecho este cálculo por lo que respecta á la Tierra, considerada como un inmenso proyectil lanzado al rededor del Sol con la velocidad media de 30 kilómetros por segundo y reducido al reposo por un choque rápido cualquiera. Deduce Helmoltz: Si la Tierra se detuviera bruscamente en el movimiento de traslación, se desarrollaría un calor equivalente al que despidiera el incendio de una masa de hulla que fuera 14 veces la masa de la Tierra. "Suponiendo á ésta — dice el mismo Helmoltz, — dotada de la capacidad calorífica menos favorable, es decir, la más fuerte, la del agua, esa masa adquiriría de resultas del choque una temperatura de 1.100°; por consiguiente, quedaría fundida del todo, y

aun gran parte de ella vaporizada. Al paralizarse la Tierra caería forzosamente en el Sol, y este nuevo choque daría origen á una cantidad de calor 400 veces mayor."

Respecto al calor que produciría la paralización brusca del movimiento de rotación de nuestro planeta, sería tan intenso que bastaría, según Thomson, para mantener la radiación solar durante 81 días, y para vaporizar toda la Tierra.

a) ¿CUÁL ES LA EDAD DE LA TIERRA, Y CUÁNTO TIEMPO QUEDA DE VIDA Á LA HUMANIDAD? — Se sabe que á medida que se desciende al interior de la Tierra, la temperatura aumenta un grado por cada 30 metros.— Se admite el estado pastoso ígneo de las materias que se encuentran en el centro de nuestro globo.— De este aumento de temperatura se ha sacado partido para calcular la edad de la Tierra. El cálculo ha suministrado estas conclusiones:

La Tierra para pasar del estado gaseoso al sólido ha necesitado más de 40 millones de años; hace treinta ó cuarenta millones nuestro planeta estaba á la temperatura del rojo blanco, y hace unos diez millones de años que empezó á solidificarse su superficie.

También la depresión de los polos ha servido de base para efectuar el mismo cálculo, y se ha encontrado por ese nuevo camino que aquella depresión empezó á producirse desde hace diez ó doce millones de años.

Y finalmente, y tomando como punto de partida la época de la formación del Sol, se ha deducido también:

1.° Que la Tierra se solidificó en su superficie desde hace diez ó quince millones de años (1).

2.° Que la Tierra existe desde hace veinticinco millones de años.

3.° Que los primeros seres orgánicos aparecieron en su superficie hace próximamente doce millones de años.

4.° Que según todas las probabilidades, los seres actuales dejarán de existir dentro de diez ó doce millones de años.

(1) Cálculos de William Thomson.

ARTÍCULO V (1)

Representación de la superficie terrestre — Proyecciones ortográfica y estereográfica — Desarrollos de Mercator y de Flamsteed.

33. "Generalmente se ignoran todas las dificultades que presenta la construcción de las cartas geográficas. Si la Tierra no fuese esférica; si ella tuviere la forma de un disco plano del cual habla Homero, nada sería más elemental que representar en una hoja, toda ó parte de su superficie, por el antiguo método de levantamientos topográficos inventado, según dicen, por los egipcios en el tiempo de Sesóstris, y corrientemente practicado hoy en las necesidades del Catastro, por el más insignificante geómetra de pueblo.

Este método que da sobre el papel una figura absolutamente semejante á la superficie plana representada; es decir, la que conserva en todos los puntos de la representación, no solamente la proporcionalidad absoluta y constante de todas las dimensiones, sino también la igualdad de los ángulos y de las direcciones de las líneas correspondientes, este método es todavía aplicable, todas las veces que se pueda, sin error sensible, asimilar á una superficie plana la porción de Tierra que se quiera representar. Pero desde que se ha pretendido hacer el mapa de una porción algo notable del esferoide terrestre, y una vez que las dimensiones de esta parte dejan de ser muy pequeñas con relación al radio de curvatura y no permiten ya el confundirla con la porción vecina del plano tangente, surge una dificultad muy grave: una superficie esférica en ningún caso es desarrollable, es decir, aplicable sin deformación, sobre un plano.

Si, pues, es siempre posible el diseñar sobre un globo exactamente, una imagen de la Tierra reducida á una escala cualquiera, tan luego como querramos transportar esta imagen sobre el papel nos encontramos en la imposibilidad de hacerlo sin alterarla de una manera ó de otra. Tómese un pedazo de cáscara de naranja, algo grande, y ensáyese, por presión ó por tracción, de aplanarlo: eso sólo se obtendrá rompiéndolo en pedazos yuxtaponibles. Su-

(1) Como obra de consulta, véase mis «Proyecciones de Cartas Geográficas.»

póngasele aun mismo inrompible, infinitamente elástico, ó sustitúyase en lugar de esa cáscara, un pedazo de caucho extremadamente delgado: se podría entonces llegar á aplanarlo sin desgarramiento, y sin pliegues, pero á condición de estirarlo, deformarlo en diversos sentidos, de suerte que su contorno primitivo, así como toda figura previamente trazada en su superficie, se encontraría finalmente transformada en una figura nueva, que sería todavía, si se quiere, la *representación* de la primera, ya que á cada punto de una corresponde un punto y solo uno de la otra; pero una representación que puede ser muy diversa según los procedimientos mecánicos empleados para obtenerla, y en donde la fórmula, generalmente desconocida, no permitiría siquiera hacer en cada punto los cálculos de área y de dirección que, solos, hacen la utilidad de las cartas geográficas.

Toda carta, en efecto, no está jamás dirigida sino á un fin perfectamente determinado. El viajero trata de rendirse cuenta lo mejor posible de las posiciones respectivas de los sitios que debe recorrer, buscando en ellas el camino más corto, el arco de gran círculo. El marino se ocupa sobre todo de la línea que debe ser la dirección de su navío á través de las grandes corrientes oceánicas, y lo único que tiene necesidad de conocer en los continentes, son sus costas. Cada nación quiere tener una figura exacta de su territorio, sea para saber la extensión superficial de él, ó bien para trazar sobre el mismo la red de caminos ó canales, ó también para repartir convenientemente tales ó cuales datos de estadística.

Una buena carta debería entonces á la vez, para responder á estos distintos fines, conservar la proporcionalidad de las distancias y la semejanza de las superficies, no alterar las direcciones, es decir, dejar en línea recta los puntos que sobre la Tierra son el largo de un mismo arco de gran círculo, y en fin, permitir siempre una lectura fácil y rápida de las coordenadas geográficas de cada punto, lo que vale decir, reemplazar la red octogonal de los meridianos y paralelos de la esfera por una red plana, de fácil percepción y de simple trazado. Los matemáticos han sometido todas estas condiciones á sus cálculos, y llegaron á la conclusión de que era materialmente imposible el realizarlas jamás todas juntas; ellos demostraron, por otra parte, que cada una aisladamente podía quedar siempre satisfecha de diferentes maneras, y que no quedaba, por consiguiente, otra cosa que hacer,

en cada circunstancia particular, la elección entre la condición á llenarse, que es la que tiene más importancia, y la condición á sacrificarse.

¿Queremos, por ejemplo, absolutamente, que el camino más corto de un punto á otro, sobre la carta, sea una línea recta? Será necesario entonces tomar la antigua proyección *gnomónica*, la primera conocida en el orden histórico, y atribuída con más ó menos verdad á Tales, que vivió unos seiscientos años antes de la era cristiana." — *A. Guebhard.*

" Debido á estas dificultades se idearon las *Cartas geográficas*, las cuales en sustancia no son otra cosa que la representación sobre un plano de una parte más ó menos extensa de la superficie terrestre. Y tal invención, según los datos que poseemos, se remonta á los tiempos de Tales y de Anaximandro, filósofos griegos, que vivieron cerca de seis siglos antes de J. C. Pero Hiparco (130 años a. de J. C.) y Ptolomeo (150 años a. de J. C.) desarrollaron otros procedimientos más apropiados para proyectar una esfera, los cuales fueron más tarde perfeccionados." -- *Schiavoni.*

34. Según el principio de la exposición anterior, podemos formular la siguiente

CUESTIÓN. — *¿Es posible trasladar sobre una carta, la superficie terrestre?*

Desde luego se puede afirmar que exactamente, no.

La Tierra es un cuerpo esférico, como se ha demostrado ya; admitir entonces que la superficie terrestre es desarrollable, es admitir que lo es también la superficie de una esfera; y de que ésta no lo es, se admite como verdad evidente en la geometría: es una cuestión de simple criterio.

No obstante, es sabido por todos que hay cartas, en las que se encuentran trazados dos círculos, uno de los cuales contiene los puntos más principales del hemisferio Norte, y el otro los del Sur, ó bien, de los dos hemisferios Oriental y Occidental; á esta clase de cartas se les llama *mapamundi.* Vemos otras cartas ó mapas que contienen sólo una parte de la superficie terrestre, como, por ejemplo, un continente, un estado, una provincia, y son llamados por eso *mapas generales, particulares ó geomórficos.*

Esto nos obliga á estudiar el modo como se ha conseguido trazar sobre un papel los diferentes puntos (ó la mayor parte) de la superficie terrestre, ó bien una parte limitada de ella.

Para esto se siguen diferentes métodos: el *de la proyección* y el

del desarrollo. El primero que es usado generalmente, en los mapamundis, puede ser dividido en dos partes principales: *Proyección ortográfica* y *proyección estereográfica* (1). El segundo método lo dividiremos también en dos clases: *desarrollo cónico* y *desarrollo cilíndrico.* Su uso se extiende generalmente á los mapas particulares.

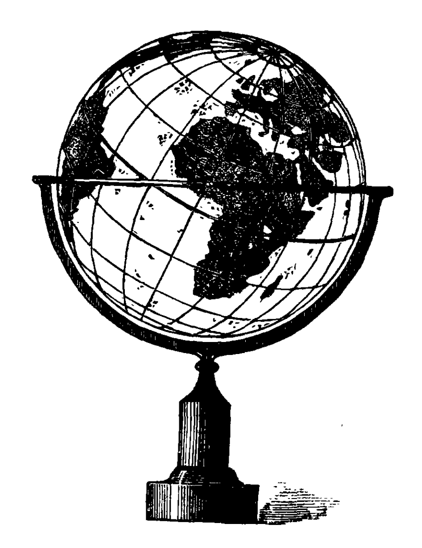


Figura 24. — Globo terrestre.

35. Proyección ortográfica ó alzada. — Esta proyección es *ecuatorial* cuando el plano de proyección es un meridiano; *polar*, cuando ese plano es el ecuador; y *horizontal*, cuando el plano de proyección es el horizonte racional de la localidad, y que el ojo del observador se supone colocado en cualquier lugar, entre el ecuador y los polos.

Proyección ortográfica ecuatorial. — El ojo del observador está en el plano del ecuador y en un punto de la recta perpendicular al meridiano de proyección en su centro; la distancia del ojo al plano de proyección, se supone considerable.

(1) Hay también la proyección *central*, en que el ojo del observador se supone situado en el centro de la Tierra, y el plano de proyección es tangente á la superficie que se proyecta, en su punto céntrico.

Los paralelos, incluyendo el ecuador, se proyectan según rectas paralelas y que interceptan sobre la circunferencia de proyección arcos respectivamente iguales á la latitud de esos paralelos á contar desde el ecuador; y el meridiano que pasa por el ojo del observador también según una recta perpendicular á aquéllas.

Los meridianos se proyectan según elipses, exceptuando el que pasa por el ojo del observador, que se proyecta según una línea recta, diámetro del círculo de proyección; y el meridiano de proyección que es, como dijimos, un círculo.

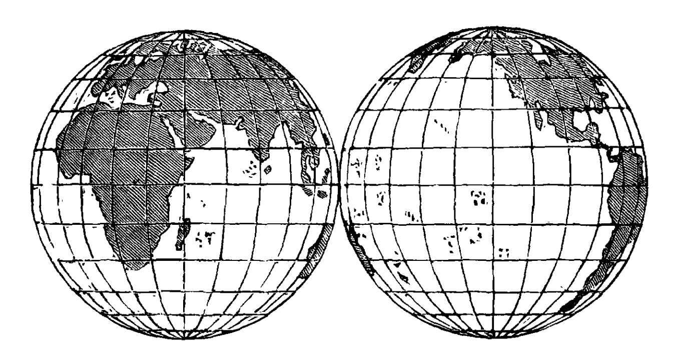


Figura 25. — Mapamundi en el sistema de proyección ortográfica.

Nota 1.ª—Esta clase de proyección es la que sirve para representar los dos hemisferios Oriental y Occidental.

Nota 2.ª—Pueden examinarse las regiones que aparecerán mejor formadas en la proyección ortográfica ecuatorial.

Ejemplo. —Supongamos que el plano de proyección en la ecuatorial es el disco del Sol, y que nosotros nos hallamos en el plano del ecuador del Sol: en ese disco notamos que una mancha que se presenta en uno de los bordes se ve bajo la forma de una línea recta, mientras que avanzando luego la mancha á la vista del observador, este mismo la va viendo en su verdadera figura, para observarla después otra vez bajo la forma de una línea recta al desaparecer en la otra parte del disco. Nótese que la trayectoria de la mancha es sensiblemente (por lo menos en algunos casos) una línea recta.

Pueden ponerse también como ejemplos las manchas que se observan en el disco lunar.

Proyección ortográfica polar. — El ojo del observador se supone á una distancia considerable de la Tierra y colocado en el eje del mundo. En este caso el polo y sus vecindades la verán bien figurada, mientras que las regiones próximas al ecuador aparecerán desfiguradas: esto no es más que un efecto de perspectiva. *Los paralelos se proyectan según círculos concéntricos con el ecuador, y los meridianos según líneas rectas que se cortan en aquel centro común,* y que son, por consiguiente, diámetros del círculo de proyección (ecuador), los que se trazan dividiendo la circunferencia de proyección de 10 en 10° ó de 5 en 5.

Observación importante. — Tanto en este sistema, como en el anterior y, en general, como en cualquiera de los que exponemos en esta obra, no se relevan todos los puntos de la superficie terrestre, como es fácil de concebir, sino que dentro de los cuadriláteros curvilíneos ó mistilíneos que se forman, se establecen los puntos más notables.

Nota.—La proyección polar sirve para representar los hemisferios Norte y Sur. Se suele emplear con preferencia para la construcción de los mapas celestes.

26. Proyecciones estereográficas.—Si á más de suponer trasparente la esfera terrestre, suponemos el ojo del observador colocado ya en uno de los polos, ó ya en el ecuador, verá el hemisferio opuesto á aquel en que él está, según un círculo, que es precisamente el plano de proyección.

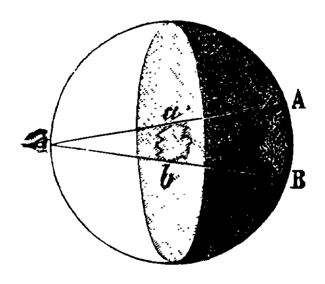


Figura 26. — Principio del sistema de proyección estereográfica.

La proyección estereográfica puede ser *polar*, *ecuatorial* ú *horizontal*, según la posición del ojo del observador en el polo, en el ecuador ó en el extremo del diámetro terrestre perpendicular al horizonte racional del lugar.

Proyección estereográfica polar.—*Los meridianos se proyectan según líneas rectas que pasan por el centro del plano de proyección* (ecuador); en cuanto á los paralelos, *se proyectan según círculos concéntricos con el ecuador.*

Nota.—Esta clase de proyección se emplea para dibujar los hemisferios Norte y Sur.

Proyección estereográfica ecuatorial. (Se usa para el dibujo de los hemisferios Oriental y Occidental).—En este sistema de perspectiva, *los meridianos y los paralelos se proyectan según círculos, á excepción del ecuador y del meridiano del observador,* que se supone colocado en el ecuador, siendo el plano de proyección un meridiano.

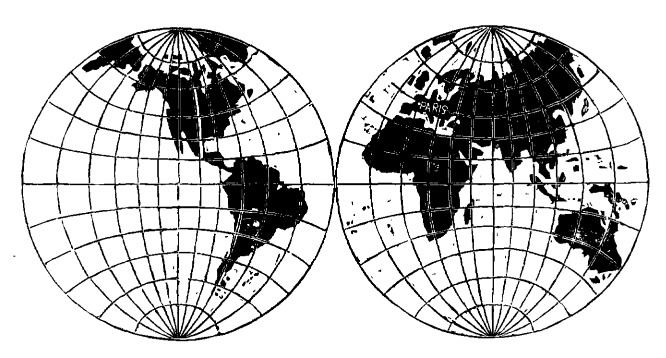


Figura 27. — Mapamundi en el sistema de proyección estereográfica.

Sirven de fundamento á esta proposición dos teoremas (1):

1.° *En la proyección estereográfica la perspectiva del ángulo de dos curvas tiene el mismo valor que éste.*

2.° *La proyección del círculo es otro círculo que tiene por centro la perspectiva del cono circunscrito á la esfera según el círculo propuesto,* ó, en otros términos, *la proyección de un círculo sobre el plano perpendicular al radio dirigido por el ojo,* es otro círculo.

1 Puede verse la demostración en mi obra citada.

Consideraciones generales sobre las proyecciones estereográficas

"1.ª Ellas tienen el mérito de conservar la magnitud de los ángulos en proyección.

2.ª Son de fácil construcción, puesto que los paralelos y los meridianos en general se proyectan en círculo ó á lo más alguna vez en línea recta.

3.ª Tienen, sin embargo, el defecto de empequeñecer en las cercanías del centro de proyección, los espacios encerrados entre paralelos y meridianos; y tanto más cuanto mayor sea la aproximación á ese centro.

4.ª Cada especie de proyección estereográfica tiene, no obstante, alguna utilidad particular; así, si se necesitan las regiones polares, se usa la proyección sobre el ecuador; si es menester tener en dos hemisferios los grandes continentes, se usa la proyección sobre el meridiano de la isla de Hierro; si se desea una carta celeste para un lugar de latitud dada, se emplea aquélla sobre el horizonte local." — *Schiavoni.*

37. Proyecciones por desarrollo. — "Para esto se supone la parte de que tratamos y que se quiere representar, como si estuviese confundida con un cilindro tangente á la Tierra según un círculo máximo, el ecuador, por ejemplo, ó con un cono tangente á un círculo paralelo. Desarrollando en un plano el cilindro ó el cono, según los principios muy simples de la geometría, se tiene el mapa de la región que nos habíamos propuesto levantar.

El gran mapa de Francia, cuya ejecución se debe á los ingenieros geógrafos y á los oficiales del estado mayor, y en el que los datos recogidos para levantarle han servido también para las medidas meridianas de que ya se ha hablado, tiene por fundamento el desarrollo cónico, pero modificado de modo que los arcos de meridianos y los arcos de paralelos conserven su verdadera magnitud.

Es necesario citar también el sistema de desarrollo debido á Mercator, que no es más que el desarrollo cilíndrico aplicado á toda la Tierra, con esta condición: que encontrándose los meridianos representados por rectas paralelas, los círculos paralelos se encuentran tanto más grandes cuanto más considerable es su latitud, lo que dilata sobremanera las regiones de la Tierra próxi-

mas á los polos. Este sistema de proyección se emplea por los marinos, porque tiene la propiedad de que dos líneas rectas tra-

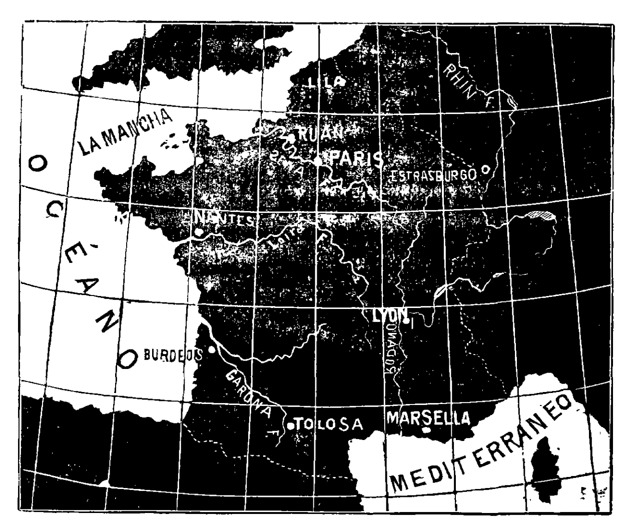


Figura 28.

Desarrollo de Flamsteed modificado. — Mapa de Francia del Estado Mayor.

zadas en el mapa, forman el mismo ángulo que el que forman las curvas que representan, lo que permite á los marinos juzgar fácilmente de la dirección de su camino." — *Guillemin.*

CAPÍTULO II

La esfera celeste

ARTICULO I

Movimiento de la bóveda estrellada. – Movimiento propio de algunos astros. – Zodíaco. – Sistema solar. – Zonas estelares.

38. En virtud del movimiento de rotación de la Tierra de occidente á oriente, recibimos la impresión del movimiento de la esfera estrellada de oriente á occidente; este fenómeno se designa bajo

la expresión de *movimiento general diurno*. Sin embargo, hay algunos astros que, á más de participar de este movimiento, tienen otro en sentido contrario ó, en general, distinto de aquél; tales son: la Luna, el Sol, los Planetas, etc.

El movimiento propio de la Luna es fácil de percibir. Si, por ejemplo, ésta sale hoy á las 8 de la noche, al día siguiente retarda su salida en casi una hora, saldrá próximamente á las 9; luego, para que esto suceda, ha debido moverse ese astro hacia el oriente en una cierta cantidad angular (que más adelante precisaremos).

O también, comparamos la posición de la Luna con la de una estrella próxima: si ésta se encuentra al oriente de aquélla, pronto la distancia disminuirá: en el curso de una noche se puede notar fácilmente la aproximación; si, por el contrario, la estrella está al occidente de la Luna, la separación aumenta cada vez más, siendo esto, como en el caso anterior, perceptible á la simple vista y también en el curso de una noche, particularmente si está la estrella inmediata á la Luna.

El Sol también tiene un movimiento contrario al general diurno; se observa este fenómeno del siguiente modo: pasa una estrella cualquiera por el meridiano á media noche; en ese momento es mediodía para nuestros antípodas, el Sol pasa por su meridiano. Si á las diez ó quince noches nos fijamos otra vez en el pasaje de la estrella por el meridiano, veremos que no es todavía media noche, luego no será mediodía para nuestros antípodas, luego el Sol se retarda en su pasaje por el meridiano, luego debe tener un movimiento en sentido contrario al movimiento general diurno.

Se puede tener una idea clara de este movimiento en sentido contrario al diurno en combinación con este mismo movimiento, si se comparan esas traslaciones con el minutero de un reloj que *atrasa*.

Supongamos, por ejemplo, este reloj: está el minutero en las 12, y en ese momento el minutero de otro reloj que anda bien señala también las 12; marchan los dos, y al terminar una vuelta el 2.° minutero, el 1.° no llega á las 12 todavía; el *atraso* no impide, sin embargo, que ese primer minutero complete su vuelta: llegará á las 12, pero con atraso.

Hay, pues, en este minutero dos *movimientos simultáneos:* uno de avance general para *llegar á la hora*, y otro en sentido contrario al primero.

Así en el Sol, la Luna, etc., hay esos dos *movimientos simultá-*

neos: uno que es el general diurno, y el otro en sentido contrario al primero.

La ilusión que produce este fenómeno, es la de que nosotros creamos un movimiento en conjunto de la bóveda estrellada en el mismo sentido que el movimiento general diurno. Van pasando por nuestro meridiano estrellas cada vez más orientales. Es así como nosotros no distinguimos durante el curso de un año siempre las mismas constelaciones; algunas se mueven encima de nuestro horizonte durante el día, para brillar más tarde durante la noche, y siempre así.

Este movimiento ilusorio completa la circunferencia durante un año.

Pero no son sólo la Luna y el Sol los astros afectados de movimientos propios. Los planetas y sus satélites (1) y los cometas también participan de esa propiedad.

Observemos: hay un astro parecido á una estrella, pero que tiene luz tranquila y cambia de posición en el cielo: ese astro es con *toda probabilidad* (2) un planeta.

Los planetas se mueven en órbitas poco separadas unas de otras. En un principio se creyó que esta separación alcanzaba hasta ocho grados y medio al Norte y al Sur de la órbita de la Tierra, de aquí es que se formara una faja de diez y siete grados de ancho y dividida en dos partes iguales por la eclíptica (3). Hoy que se conoce con más precisión el ángulo que con ésta forma la órbita del planeta que más se separa de aquella curva, habría tenido sólo un ancho de 14° 00' 26'' (4).

A esa faja se le llama ZODÍACO y se halla dividida en doce partes iguales, que reciben el nombre general de SIGNOS del Zodíaco, ó signos zodiacales, y en particular son: *Aries, Tauro, Géminis, Cáncer, Leo, Virgo, Libra, Escorpión, Sagitario, Capricornio, Acuario* y *Piscis;* ó bien, Carnero, Toro, Gemelos, Cangrejo, León, Virgen, Balanza, Escorpión, Sagitario, Capricornio, Acuario y Peces.

(1) O sean cuerpos que giran al rededor de los planetas.

(2) Después veremos el por qué de esta incertidumbre.

(3) La órbita de la Tierra se llama así, porque en ella es que se producen los eclipses.

(4) Ese planeta es Mercurio. Sin embargo, al hacerse la afirmación del texto, entiéndase que prescindimos de los planetoides, entre los cuales hay uno, Palas, que tiene una inclinación de 34°.

Estas denominaciones son muy antiguas. Ya Hiparco hace dos mil años las mencionaba.

Según el número de divisiones y el ancho del Zodíaco, deducimos que él está formado de doce rectángulos esféricos que abarcan en los cielos una región de 34° de largo por 17° de ancho.

Resulta de todo lo expuesto en este artículo, que la Luna, el Sol, los planetas y los satélites van pasando sucesivamente por todos los signos del Zodíaco, durante sus movimientos de traslación. No sucede así con los cometas, ó al menos con algunos de ellos, que tienen con la eclíptica inclinaciones inferiores y superiores á los 8°30' de que antes hablamos.

Veremos después, al hablar de la precesión de los equinoccios, algo más respecto al Zodíaco.

39. Ahora pasemos en revista los cuerpos que componen el Sistema solar ó *Sistema planetario*, dejando para más adelante la exposición detallada de este conjunto de astros.

El *Sol*, centro del sistema; los planetas enumerados en orden de sus distancias al Sol, *Vulcano* (?), *Mercurio*, *Venus*, *la Tierra*, *Marte*, *270* (1) *Planetoides*, *Júpiter*, *Saturno*, *Urano* y *Neptuno*.

La Tierra con su satélite, que es la Luna; Marte con dos; Júpiter con cuatro; Saturno, ocho; Urano, cuatro; Neptuno uno.

A más de estos 299 cuerpos que giran en torno del Sol, hay una cierta cantidad de cometas, astros que estudiaremos más lejos, que gravitan también al rededor del astro radiante.

(*a*) Insertamos en seguida un cuadro donde se anotan los símbolos que representan los signos del Zodíaco, el Sol, la Luna y los planetas:

SIGNOS DEL ZODÍACO

			Grados				Grados
0	♈	*Aries*	0	3	♋	*Cáncer*	90
1	♉	*Taurus*	30	4	♌	*Leo*	120
2	♊	*Geminis*	60	5	♍	*Virgo*	150

(1) Así era en 1889.

			Grados				Grados
6	♎	*Libra*........	180	9	♑	*Capricornus*...	270
7	♏	*Scorpius*......	210	10	♒	*Aquarius*.....	300
8	♐	*Sagitarius*....	240	11	♓	*Piscis*........	330

☉ Sol. ☾ Luna.

☿ Mercurio.	♁ La Tierra.	♃ Júpiter.	♅ Urano.
♀ Venus.	♂ Marte.	♄ Saturno.	♆ Neptuno.

Elementos de Zoología.

POR EL DOCTOR CARLOS BERG.

(Continuación.)

El *ácido carmínico* ($C^{17}H^{18}O^{10}$), es el principio colorante que se halla en la cochinilla (*Coccus Cacti*), y en otros *Cóccidos.*

4. *Cuerpos indiferentes, nitrogenados.*

Á este grupo de substancias pertenecen las materias colorantes de la orina, como, por ejemplo, la amarilla *(uroxantina)*, las azules (*urocianina* y *uroglaucina)*, y las rojas *(urorodina, urobilina* y *uroeritrina*), y muchos otros pigmentos que dan coloraciones más ó menos vivas al pico, á las plumas, á las patas y á los huevos de las aves, á las cáscaras y huevos de los moluscos, cangrejos, etc.

La *clorófila* se encuentra, ya sea difundida en varios *Protozoarios* y *Gusanos*, ó ya en las algas que se hallan en simbíosis (véase pág. 229) con esos animales.

5. *Combinaciones ciánicas.*

El *sulfocianato de potasio* (KCNS), aparece en la saliva de las glándulas submaxilar y parótida, notándose también vestigios en la orina. Sus soluciones toman una coloración roja, tratadas por el cloruro de hierro con un poco de ácido clorhídrico.

MATERIA FORMADA.

PROTOPLASMA.

Las substancias anteriormente indicadas, que forman el cuerpo animal, se encuentran en uno de los tres estados de cohesión; algunas se hallan, sin embargo, en dos estados: ya como substancias gaseosas y líquidas, ya como líquidas y sólidas. Agrupándose de varias maneras ó penetrando la una á la otra, constituyen las partículas, los corpúsculos, las telas y los miembros del organismo, que se han llamado respectivamente *microsomas, células, tejidos* y *órganos,* según la sencillez ó la complicación de su composición y estructura, y según su función. La substancia fundamental de todo eso es el *protoplasma.*

El *protoplasma* [1], *sarcoda* [2], ó *plasma primordial,* se compone de más de cuarenta materias, entre las cuales figuran: la *vitelina,* la *miosina,* las *peptonas,* los *peptonides,* la *pepsina,* la *nucleína,* la *lecitina,* la *guanina,* la *sarcina,* la *xantina,* la *colestearina,* la *paracolestearina,* el *glicógeno,* el *azúcar,* la *resina etálica, pigmentos,* los ácidos: *oleínico, esteárico, palmitínico* y *butírico, glicerinas,* el *carbonato de amonio,* el *anhidrido carbónico, carbonatos, fosfatos* y *sulfatos,* el *magnesio,* el *fierro,* algunas combinaciones del *sodio* y del *potasio,* varias combinaciones del *calcio* con *grasas,* y el *agua.*

El *protoplasma* es una substancia viva, que constituye por sí sola, los organismos más inferiores, y que desempeña toda clase de funciones, sin la existencia de órganos especiales. En los demás seres animados lo observamos en las células, donde no es menos activo. Se mueve, se nutre, crece, produce, dividiéndose, otros seres ó células semejantes, y está dotado de sensibilidad.

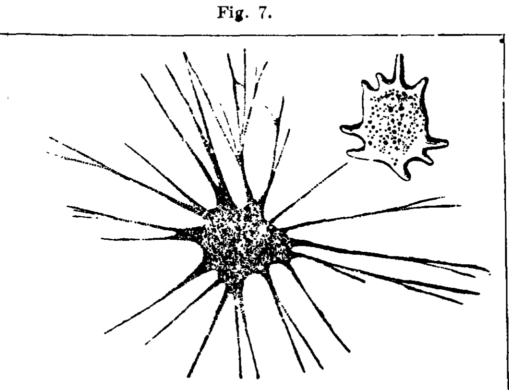
Por lo general el *protoplasma* es incoloro, transparente, coloideo y de poca cohesión. Se disuelve por los álcalis; se precipita por los ácidos; el oxígeno, la influencia de varios gases y cambios de temperatura producen alteraciones sensibles en su constitución molecular ó microsomática. En contacto con otras substancias orgánicas,

1. gr. *prôtos*: lo primordial; *plásma*: lo formado. 2. gr. *sarkoeidés:* carnoso, parecido á carne.

por lo general las disuelve. Tiene la propiedad manifiesta de formar en su interior vacuolos ó lagunas.

Á simple vista parece una substancia homogénea; con gran aumento se muestra faviforme, espumoso, fibrilar, ó formado por pequeños tubos, contenientes de la parte líquida, de pigmentos, partículas no digeridas y pequeños corpúsculos representados, en parte, por gotas de grasa. Estos últimos establecen corrientes, entrando en los apéndices que largan y recogen los organismos protoplasmáticos (fig. 7), volviendo al centro, ó describiendo círculos en la parte periférica ó central, etc. Temperaturas elevadas (ya 40° en muchos casos) y bajas, gases irrespirables, corrientes eléctricas intensas ó prolongadas, etc., hacen desaparecer la circulación de los corpúsculos, pero que se establece de nuevo, vueltas las condiciones normales, con tal que no se haya producido la muerte del *protoplasma*. Una temperatura algo elevada de influencias eléctricas módicas, activan la circulación de los corpúsculos del *protoplasma*.

Fig. 7.



Amoeba verrucosa Ehr., sin corrientes de corpúsculos en los apéndices obtusos.

Amoeba porrecta Schultze, con corrientes de corpúsculos en los apéndices agudos y en parte ramificados.

En los casos en que el *protoplasma* es más ó menos homogéneo en todas sus partes, los animales constituídos por esta substancia y sin organización, no tienen forma determinada. En vista de esto y de las alteraciones y cambios que se observan en su forma, se les ha llamado *Amorfozoarios* [1], *Amíbeas* [2] ó *Protistas* [3]. Con el endurecimiento parcial ó total de la capa externa del *protoplasma*, se establecen las formas determinadas en los animales inferiores.

En los jugos nutritivos de los animales superiores ó en ciertos

1. gr. *ámorphos:* sin forma; *zoon*: animal. 2. gr. *ámoibé:* cambio. 3. De *Proteo*, Dios marino mitológico que continuamente variaba de forma

tejidos y en las secreciones patológicas, se encuentran corpúsculos que tienen mucha semejanza con las *Amíbeas* libres de las aguas. Se les da el nombre de *células ameboidales* [1] y á ellas pertenecen los glóbulos incoloros de la sangre, los corpúsculos linfáticos, los corpúsculos del tejido conjuntivo, los corpúsculos del pus, etc. También aumentan su actividad con la moderada elevación de temperatura y son aptos para muchas funciones.

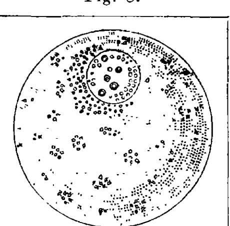
MORFOLOGÍA Y FISIOLOGÍA DE LA CÉLULA.

El protoplasma, en su mayor parte, se presenta diferenciado: tiene la parte externa endurecida, como una especie de pellejo, y la interna, líquida; en esta forma se presenta como corpúsculo. A éste se le ha dado el nombre de *citoda* [2]; si su organización es más elevada, que es lo común. se le llama *célula* [3]

Las *células* forman aglomeraciones *(colonias)* y fusiones, constituyendo así el cuerpo animal; sólo los *Protozoarios* carecen de ellas ó están representados por una sola célula.

Esos corpúsculos microscópicos pueden ser considerados como organismos elementales, en vista de sus múltiples funciones, ó ser mirados como una especie de laboratorios químico-fisiológicos, en que se efectúan procedimientos variados, principalmente en cuanto á la absorción, la transformación y la secreción de las materias. Observamos en las *células* cambios de forma, movimientos, fusión con otras, varias clases de reproducción y la muerte. Una sola célula puede dar lugar al desarrollo de un nuevo animal, lo que sucede respecto al *huevo* ú *óvulo* (fig. 8), que en su estado primitivo es una *célula*.

Fig. 8.



HUEVO DE UN PESCADO.

La membrana vitelina corresponde á la membrana celular, el vitelo al plasma, en éste se halla la vesícula germinativa equivalente al núcleo, y en esta última la mancha germinativa ó los nucléolos.

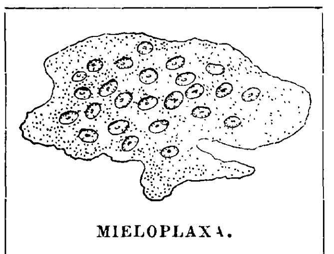
La *célula* consta de un pellejo (*membrana celular*) más ó menos consistente, de un contenido (*plasma ó contenido celular*) generalmente líquido, de un corpúsculo (*núcleo*) semi-sólido que se halla en el *plasma*, y de algunos pequeños granos (*nucléolos*) conteni-

1. lat. *amoeboidalis:* alternante. 2. gr. *kytos*: que encierra algo. 3. lat. *cella, cellula.* celda, celdilla.

dos en el *núcleo*. Hay *células* que carecen de algunos de estos elementos, como, por ejemplo, las *células ameboidales*, en que falta la *membrana;* á esta clase de *células* se les llama también *primordiales,* sobre todo si no tienen la facultad de cambiar de lugar.

Las *dimensiones* de las *células* varían según la clase de animal, órgano ó tejido; aun en el mismo complexo celular se observan distintos tamaños. Á las más pequeñas pertenecen las células de la sangre (*glóbulos sanguíneos*) del hombre que tienen sólo un diámetro de 0,007 á 0,008 de milímetro. Más grandes ya son las células nerviosas del hombre, que miden 0,02 á 0,09 mm., y aun de mayor tamaño son las de las glándulas salivares de los insectos, que alcanzan 0,2 mm. de diámetro. Á las células más grandes pertenecen los *óvulos* ó las *células ovulares.* El óvulo humano tiene 0,2 de milímetro de diámetro, y la yema del huevo de las aves, que en verdad no es más que una *célula,* es un gigante. Muy grandes son también las *mieloplaxas* [1] ó *células gigantes* (fig. 9) de la corteza de las médulas de los recién nacidos; éstas contienen un gran número de núcleos y provienen probablemente de la fusión de muchas células.

Fig. 9.



MIELOPLAXA.

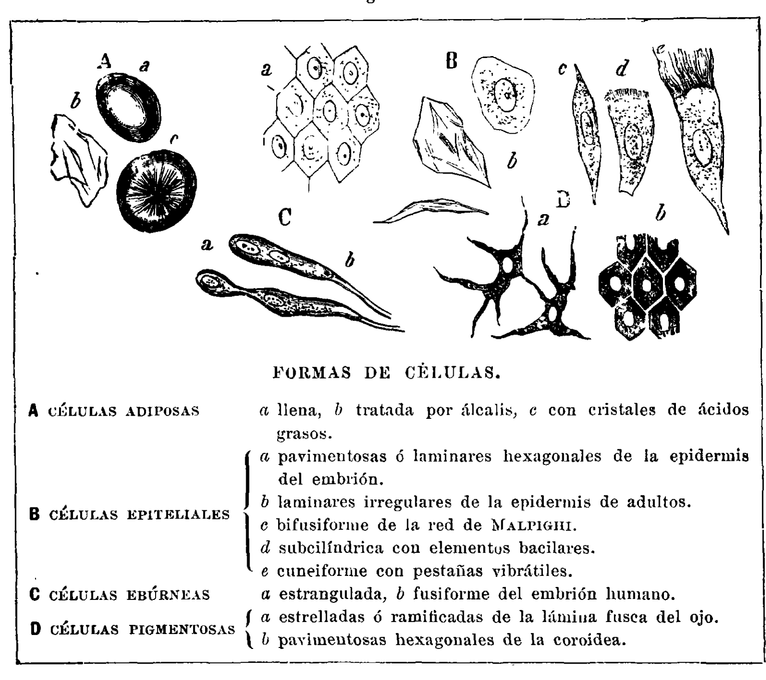
En cuanto á la *forma,* las *células* son al principio más ó menos esferoidales; por el contacto ú otras influencias, sufren más tarde modificaciones, mostrándose del aspecto de discos (*células disciformes*), láminas ó escamas (*laminares*), cilindros (*cilíndricas*), copas (*cupuliformes*), conos (*cónicas*), cuñas (*cuneiformes*), husos (*fusiformes*), látigos (*flageladas*), horquillas (*bifurcadas* y *trifurcadas*), estrellas (*estrelladas*), etc. (fig. 10); las de muchos ángulos ó caras se llaman *poligonales* ó *poliédricas.*

La *membrana celular*, representada generalmente por protoplasma endurecido ó transformado, ó raras veces por la celulosa (véase pág. 7, tomo II), que la constituye en los vegetales (véase pág. 226, tomo I), es tenue, lisa ó granulosa, ó algunas veces muy escabrosa (fig. 11), variando según la clase de cé

1, gr. *myelós:* médula; *pláx:* placa.

lulas, tejidos ó animales. Posee en muchos casos pequeños canales ó poros, que son infundibuliformes [1] en los *óvulos* y llamados *micrópilas* [2].

Fig. 10.



FORMAS DE CÉLULAS.

A CÉLULAS ADIPOSAS	*a* llena, *b* tratada por álcalis, *c* con cristales de ácidos grasos.
B CÉLULAS EPITELIALES	*a* pavimentosas ó laminares hexagonales de la epidermis del embrión. *b* laminares irregulares de la epidermis de adultos. *c* bifusiforme de la red de MALPIGHI. *d* subcilíndrica con elementos bacilares. *e* cuneiforme con pestañas vibrátiles.
C CÉLULAS EBÚRNEAS	*a* estrangulada, *b* fusiforme del embrión humano.
D CÉLULAS PIGMENTOSAS	*a* estrelladas ó ramificadas de la lámina fusca del ojo. *b* pavimentosas hexagonales de la coroidea.

En lugar de la *membrana* propiamente dicha, se observa en muchas células la parte externa más compacta, una *substancia cortical*, que se confunde paulatinamente con el contenido y que puede ser considerada como membrana en formación; en algunos casos una parte de la CÉLULA está revestida de la *membrana*, la otra lleva la *substancia cortical.*

Fig. 11.



CÉLULA ESCABROSA.

El *contenido ó plasma celular* está representado por el protoplasma y tiene las propiedades de éste. Además de los pequeños granos, gotas de grasa y pigmentos ya mencionados, puede contener cristales ú otras concreciones sólidas.

Infundibuliforme: de forma de embudo. 2. gr. *micrós:* pequeño; *pyle:* puerta.

El *núcleo celular*, que se compone de protoplasma más ó menos condensado, en el que se observan principalmente albuminatos (sobre todo, la *protamina*, la *nucleína*, *la cromatina* y la *lecitina)*, y combinaciones grasas y fosfóricas, tiene de 0,001 á 0,1 de milímetro de diámetro y es generalmente esferoidal ó de forma de elipsoide (fig. 10); pero lo encontramos también disciforme (en uñas), cilíndrico (en músculos lisos), y estrellado ó ramificado (en el recto de algunos bómbices y esfinges). Representa un corpúsculo sólido ó un cuerpo vesicular; en el último caso consta de propia substancia cortical ó membrana y del contenido *(jugo ó plasma nuclear)*. En el *jugo* se ven en muchos casos fibras protoplasmáticas ó una masa reticulada, ó un ovillo de fibras. Su posición es central ó parietal; en las células alargadas es muy á menudo terminal.
